

## 第二节 矩阵的运算

- 一、矩阵的加法
- 二、数与矩阵相乘
- 三、矩阵与矩阵相乘
- 四、矩阵的其它运算
- 五、小结 思考题

# 一、矩阵的加法

## 1、定义

设有两个  $m \times n$  矩阵  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$ , 那末矩阵  $A$  与  $B$  的和记作  $A + B$ , 规定为

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

**说明** 只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算.

例如 
$$\begin{pmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & -9 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12+1 & 3+8 & -5+9 \\ 1+6 & -9+5 & 0+4 \\ 3+3 & 6+2 & 8+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 11 & 4 \\ 7 & -4 & 4 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

## 2、 矩阵加法的运算规律

$$(1) A + B = B + A;$$

$$(2) (A + B) + C = A + (B + C).$$

$$(3) -A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix} = (-a_{ij}),$$

称为矩阵 $A$ 的负矩阵.

$$(4) A + (-A) = 0, A - B = A + (-B).$$

## 二、数与矩阵相乘

### 1、定义

数 $\lambda$ 与矩阵 $A$ 的乘积记作 $\lambda A$ 或 $A\lambda$ ,规定为

$$\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

## 2、数乘矩阵的运算规律

(设  $A$ 、 $B$  为  $m \times n$  矩阵,  $\lambda, \mu$  为数)

$$(1) (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A);$$

$$(2) (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A;$$

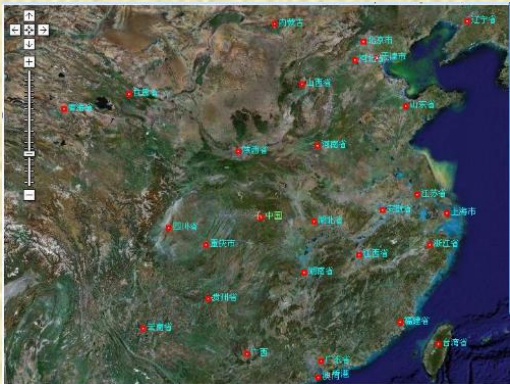
$$(3) \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.$$

矩阵相加与数乘矩阵合起来, 统称为矩阵的线性运算.

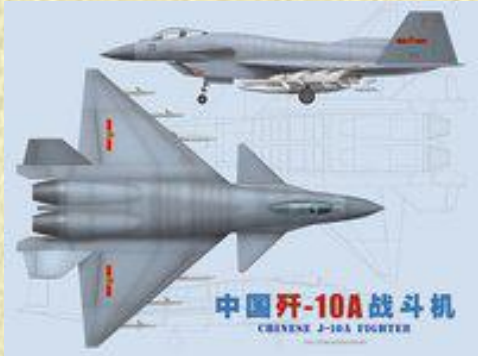
### 三、矩阵与矩阵相乘



# 如何对重要的图片文字进行加密？



|                                                                                 |           |          |                         |           |                   |              |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----------|----------|-------------------------|-----------|-------------------|--------------|
| 1-1.<br>基本<br>信息。                                                               | 姓 名。      | 李艳艳。     | 性 别。                    | 女。        | 出生年月              | 1982 年 10 月。 |
|                                                                                 | 最终学历。     | 研究生。     | 职 称。                    | 副教授。      | 电 话。              | 18287680121。 |
|                                                                                 | 学 位。      | 硕士。      | 职 务。                    | 应用数学研究所所长 | 传 真。              | 。            |
|                                                                                 | 所在学院。     | 数学与工程学院。 | E-mail。                 |           | 529374583@qq.com。 |              |
|                                                                                 | 通信地址（邮编）。 |          | 云南省文山市学府路 66 号（663099）。 |           |                   |              |
|                                                                                 | 研究方向。     |          | 数值计算，矩阵理论及其应用。          |           |                   |              |
| 近五年来讲授的主要课程（含课程名称、课程类别、周学时、届数、学生总人数）（不超过五门）；承担的实践教学（含实验、实习、课程设计、毕业设计/论文，学生总人数）。 |           |          |                         |           |                   |              |
| 一、近五年来讲授的主要课程。                                                                  |           |          |                         |           |                   |              |



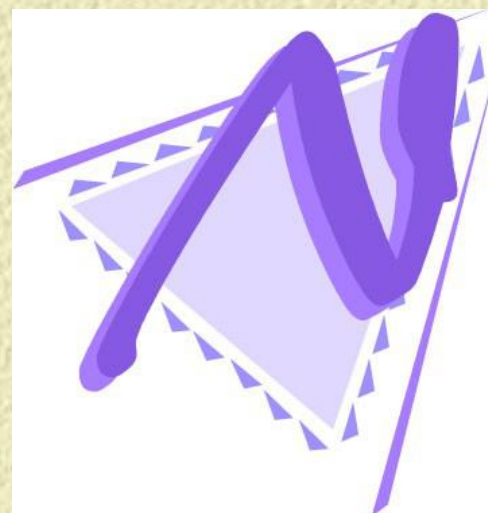
# 如何对字体进行变换？

**Abstract:** Studies the estimation of the error bounds of the S-Nekrasov matrix and the B-S-Nekrasov matrix of the new subclass matrix  $P$ . Using the properties of S-Nekrasov matrices  $M$  and  $\tilde{M} = I - D + DM$ , The estimation formula of the infinite norm of the inverse matrix of the S-Nekrasov matrix, Combining the nature of inequality and a certain technique of shrinking, new estimators with the parameters of the S-Nekrasov matrix error bounds are obtained. Finally, numerical examples are given to illustrate the feasibility and superiority of the estimator.

**Keywords:** Linear complementarity problems; Error bounds; S-Nekrasov matrices; B-S-Nekrasov matrices.

*Abstract:* Studies the estimation of the error bounds of the S-Nekrasov matrix and the B-S-Nekrasov matrix of the new subclass matrix  $P$ . Using the properties of S-Nekrasov matrices  $M$  and  $\tilde{M} = I - D + DM$ , The estimation formula of the infinite norm of the inverse matrix of the S-Nekrasov matrix, Combining the nature of inequality and a certain technique of shrinking, new estimators with the parameters of the S-Nekrasov matrix error bounds are obtained. Finally, numerical examples are given to illustrate the feasibility and superiority of the estimator.

*Keywords:* Linear complementarity problems; Error bounds; S-Nekrasov matrices; B-S-Nekrasov matrices.



# 如何快速计算工厂的总收入和总利润的问题？

表1. 2017年各工厂的各产品产量（吨）

| 产品<br>工厂 | 甲 | 乙  | 丙 |
|----------|---|----|---|
| I        | 6 | 10 | 5 |
| II       | 3 | 6  | 7 |

表2. 各产品的单位价格及单位利润（万元/吨）

| 价格利润<br>产品 | 单位<br>价格 | 单位<br>利润 |
|------------|----------|----------|
| 甲          | 7        | 3        |
| 乙          | 8        | 3        |
| 丙          | 10       | 6        |

表1. 2017年各工厂的各产品产量 (吨)

| 产品<br>工厂 | 甲 | 乙  | 丙 |
|----------|---|----|---|
| I        | 6 | 10 | 5 |
| II       | 3 | 6  | 7 |

表2. 各产品的单位价格及单位利润 (万元/吨)

| 价格利润<br>产品 | 单位价<br>格 | 单位利<br>润 |
|------------|----------|----------|
| 甲          | 7        | 3        |
| 乙          | 8        | 3        |
| 丙          | 10       | 6        |

填写下面的表3，各工厂一年的总收入及总利润 (万元/吨)

| 总收入及总利润<br>工厂 | 总收<br>入 | 总利<br>润 |
|---------------|---------|---------|
| I             | 172     | 78      |
| II            | 139     | 69      |

$$6 \times 7 + 10 \times 8 + 5 \times 10$$

$$6 \times 3 + 10 \times 3 + 5 \times 6$$

# 矩阵的乘法

$$AB = C$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 10 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 8 & 3 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \times 7 + 10 \times 8 + 5 \times 10 & 6 \times 3 + 10 \times 3 + 5 \times 6 \\ 3 \times 7 + 6 \times 8 + 7 \times 10 & 3 \times 3 + 6 \times 3 + 7 \times 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} C$$

$$A_{m \times s} B_{s \times n} = C_{m \times n}$$

前提条件

前列=后行

结果类型

前行\*后列

乘积之后元素之间的关系

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{is}b_{sj}$$

$$= (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{is}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix}$$

前取行，后取列，对应元素乘积再求和

上页

下页

返回

# 矩阵的乘法

## 定义1

设矩阵  $A = (a_{ij})_{m \times s}$ ,  $B = (b_{ij})_{s \times n}$ , 称  $C = (c_{ij})_{m \times n}$

为矩阵  $A$  和  $B$  的乘积,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj}$$

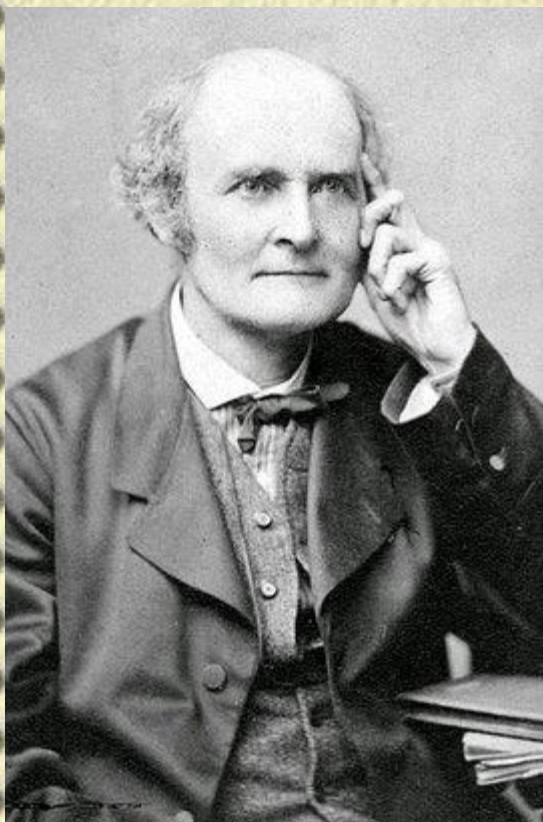
记为  **$AB = C$**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{is} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mj} & & a_{ms} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3j} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sj} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

# 矩阵的乘法

## 科普小知识



凯莱(Arthur Cayley 1821~1895):  
英国纯粹数学的近代学派带头人.  
矩阵理论的创立者, 1858年发表了  
《矩阵论的研究报告》, 系统的阐  
述了关于矩阵的理论.

矩阵乘法的运算规律是1858  
年凯莱在研究线性变换时建立的.

上页

下页

返回

# 矩阵的乘法

## 例 1

求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  的乘积  $AB, BA$

解：  $AB = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$BA$  无意义

# 矩阵的乘法

例 2

求矩阵  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$  的乘积  $AB, BA$

解

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ 16 & 8 \end{pmatrix}$$

注意：

1. 矩阵乘法不满足交换律，即在一般情况下  $AB \neq BA$

2. 尽管矩阵  $A$  与  $B$  满足  $AB=0$ , 但是得不出  $A=0$  或  $B=0$  的结论

# 矩阵的乘法

若  $AB = AC$  且  $A \neq 0$

推不出  $B = C$

3. 一般情况下矩阵乘法不满足消去律

## 2、矩阵乘法的运算规律

(1)  $(AB)C = A(BC)$ ;

(2)  $A(B + C) = AB + AC$ ,  $(B + C)A = BA + CA$ ;

(3)  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$  (其中  $\lambda$  为数) ;

(4)  $AE = EA = A$ ;

(5) 若  $A$  是  $n$  阶矩阵, 则  $A^k$  为  $A$  的  $k$  次幂, 即  
$$A^k = \underbrace{A A \cdots A}_{k\text{个}} \text{ 并且 } A^m A^k = A^{m+k}, (A^m)^k = A^{mk}.$$

( $m, k$  为正整数)

例1 计算下列乘积:

$$(1) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \ 2)$$

$$\text{解 } (1) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \ 2) = \begin{pmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 2 \\ 2 \times 1 & 2 \times 2 \\ 3 \times 1 & 3 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$(2) \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{解} \quad \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{21}b_2 + a_{31}b_3 & a_{12}b_1 + a_{22}b_2 + a_{32}b_3 & a_{13}b_1 + a_{23}b_2 + a_{33}b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}b_1^2 + a_{22}b_2^2 + a_{33}b_3^2 + 2a_{12}b_1b_2 + 2a_{13}b_1b_3 + 2a_{23}b_2b_3.$$

## 四、矩阵的其它运算

### 1、转置矩阵

**定义** 把矩阵  $A$  的行换成同序数的列得到的新矩阵，叫做  $A$  的转置矩阵，记作  $A^T$ 。

例  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix};$

$$B = (18 \ 6), \quad B^T = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

## 转置矩阵的运算性质

$$(1) (A^T)^T = A;$$

$$(2) (A + B)^T = A^T + B^T;$$

$$(3) (\lambda A)^T = \lambda A^T;$$

$$(4) (AB)^T = B^T A^T.$$

例2 已知

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{求 } (AB)^T.$$

解法1

$$\begin{aligned} \because AB &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \therefore (AB)^T = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 14 & -3 \\ 17 & 13 & 10 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

## 解法2

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

## 2、方阵的行列式

**定义** 由  $n$  阶方阵  $A$  的元素所构成的行列式，叫做方阵  $A$  的行列式，记作  $|A|$  或  $\det A$ .

例  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$  则  $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -2$ .

**运算性质** (1)  $|A^T| = |A|$ ;      (2)  $|\lambda A| = \lambda^n |A|$ ;

(3)  $|AB| = |A||B|$ ;       $\Rightarrow |AB| = |BA|$ .

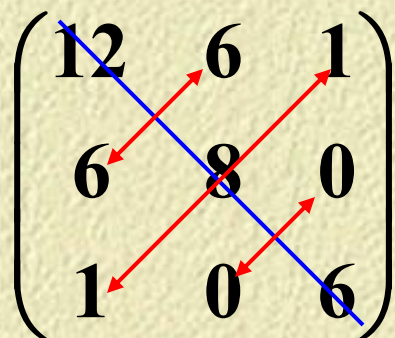
### 3、对称阵与伴随矩阵

**定义** 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 如果满足  $A = A^T$ , 即

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

那末  $A$  称为**对称阵**.

例如  $A = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 1 \\ 6 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$  为对称阵.



**说明** 对称阵的元素以主对角线为对称轴对应相等.

如果  $A^T = -A$  则矩阵  $A$  称为反对称的.

**例3** 证明任一  $n$  阶矩阵  $A$  都可表示成对称阵与反对称阵之和.

**证明** 设  $C = A + A^T$

$$\text{则 } C^T = (A + A^T)^T = A^T + A = C,$$

所以  $C$  为对称矩阵.

$$\text{设 } B = A - A^T, \quad \text{则 } B^T = (A - A^T)^T = A^T - A = -B,$$

所以  $B$  为反对称矩阵.

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2} = \frac{C}{2} + \frac{B}{2},$$

命题得证.

**定义** 行列式  $|A|$  的各个元素的代数余子式  $A_{ij}$  所构成的如下矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{称为矩阵 } A \text{ 的伴随矩阵.}$$

**性质**  $AA^* = A^*A = |A|E.$

**证明** 设  $A = (a_{ij})$ , 记  $AA^* = (b_{ij})$ , 则

$$b_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = |A|\delta_{ij},$$

故  $AA^* = (A|\delta_{ij}) = |A|(\delta_{ij}) = |A|E.$

同理可得

$$AA^* = \left( \sum_{k=1}^n A_{ki} a_{kj} \right) = (A|\delta_{ij}) = |A|(\delta_{ij}) = |A|E.$$

## 4、共轭矩阵

### 定义

当  $A = (a_{ij})$  为复矩阵时，用  $\overline{a_{ij}}$  表示  $a_{ij}$  的共轭复数，记  $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$ ， $\overline{A}$  称为  $A$  的共轭矩阵。

## 运算性质

(设  $A, B$  为复矩阵,  $\lambda$  为复数, 且运算都是可行的) :

$$(1) \overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B};$$

$$(2) \overline{\lambda A} = \overline{\lambda} \overline{A};$$

$$(3) \overline{AB} = \overline{A} \overline{B}.$$

## 五、小结

### 矩阵运算

加法

数与矩阵相乘

矩阵与矩阵相乘

转置矩阵

方阵的行列式

对称阵与伴随矩阵

共轭矩阵

# 矩阵的乘法

## 注意点

### 1. 矩阵乘法的定义

(1) 前提条件;

(2) 相乘法则;

### 2. 矩阵乘法不满足交换律

### 3. 矩阵乘法不满足消去律

上页

下页

返回

## 思考题

设 $A$ 与 $B$ 为 $n$ 阶方阵,问等式

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

成立的充要条件是什么?

## 思考题解答

答  $\because (A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB - B^2,$   
故  $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$  成立的充要条件为  
 $AB = BA.$