

案例 2

经济问题的概率处理方法

1、背景知识

经济预测是一门科学。它运用定性和定量的科学分析方法，揭示出经济发展过程中的客观规律，并对各类经济现象之间的联系以及作用机制作出科学的分析，指出各类经济现象和经济过程未来发展的可能途径以及结果。一般来说，运用概率知识来对经济问题进行质和量的分析是一种很好的手段。如果我们把对所预测的经济事件称作一种试验的话，其结果不能事先准确的预言。但是我们总是假定实验的一切可能结果的集合是已知的，且把这样的集合称作一个样本空间。而对于一次实验，我们感兴趣的是实验结果的某个函数，而不是结果本身，我们所感兴趣的这些量，或更严格地说，这些定义于样本空间上的实值函数，称为随机变量。随机变量的数学期望是概率论中最重要的概念之一。

2、案例分析

按季节出售的某种应时商品，每出售一件获得纯利润 b 元，若到季末尚有剩余商品未能售完，则每件将净亏损 1 元。设在任意季节内，在某特定的百货商店被订购的件数是一随机变量，其概率分布列为 $p(i), i \geq 0$ 。若这商店必须提前储备该商品，试求为使商店能获得最大的期望利润，它应储备该商品多少件？

设 X 表示该商品被订购的件数，如储备 s 件，其利润记为 $f(s)$ ，则 $f(s)$ 可表示为

$$f(s) = \begin{cases} bX - (s - X), & X \leq s \\ sb, & X > s \end{cases}$$

于是，期望利润为

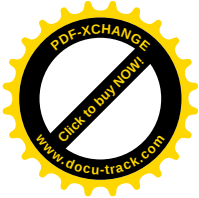
$$E[f(s)] = \sum_{i=0}^s [bi - (s-i)1]p(i) = (b+1) \sum_{i=0}^s ip(i) - (b+1)s \sum_{i=0}^s p(i) + sb$$

为确定 s 的最优值，先研究当 s 增加一件时，所获利润有何变化。经变量替换，此时的期望利润等于

$$\begin{aligned} E[f(s+1)] &= b(s+1) + (b+s) \sum_{i=0}^{s+1} [i-s-1]p(i) \\ &= b(s+1) + (b+1) \sum_{i=0}^s [i-s-1]p(i) \end{aligned}$$

所以 $E[f(s+1)] - E[f(s)] = b - (b+1) \sum_{i=0}^{s+1} p(i)$ ，因此只要 $\sum_{i=0}^s p(i) < \frac{b}{b+1}$ 。

则储备 $s+1$ 件比储备 s 件更好。因为上式的左边是 s 的递增函数而右边是常数，故对一切 $s \leq s^*$ 成立，其中 s^* 为满足上面不等式的最大的 s ，由于



$$E(f(0)) < \mathbf{L} < E(f(s^*)) < E(f(s^* + 1)) < \mathbf{L}$$

因此，储备 s^* 件商品可使期望利润达到最大值。上例中当 X 换成连续随机变量时，解法是类似。