

第 5 章 大数定律与中心极限定理

(A)

一、填空题

1. 设随机变量 X 的数学期望为 $E(X) = \mu$ ，方差为 $D(X) = \sigma^2$ ，则由契比谢夫不等式，有 $P\{|X - \mu| \geq 3\sigma\} \leq$ _____.
2. 设随机变量 X 的数学期望为 $E(X) = 100$ ，方差为 $D(X) = 10$ ，则由契比谢夫不等式，有 $P\{80 < X < 120\} \geq$ _____.
3. 设随机变量 X 的方差为 2，则根据契比谢夫不等式有估计 $P\{|X - E(X)| \geq 2\} \leq$ _____.
4. 设随机变量 X 和 Y 的数学期望都是 2，方差分别为 1 和 4，而相关系数为 0.5，则根据契比谢夫不等式 $P\{|X - Y| \geq 6\} \leq$ _____.
5. 设 η_n 是 n 次独立重复试验中事件 A 出现的次数， p 为 A 在每次试验中出现的概率，则对任意给定的正数 ε ，有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\frac{\eta_n}{n} - p| < \varepsilon\} =$ _____.
6. 若随机变量序列 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 独立同分布，且 $E(X_n) = 0$ ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\sum_{i=1}^n X_i < n\} =$ _____.
7. 将一枚硬币连抛 100 次，则出现正面次数大于 65 的概率为_____.

二、单项选择题

1. 若随机变量 X 的方差 $D(X)$ 存在， a 为常数，则 $P\{\left|\frac{X - E(X)}{a}\right| \geq 1\} \leq$ ().
(A) $D(X)$ (B) 1 (C) $\frac{D(X)}{a^2}$ (D) $a^2 D(X)$
2. 设 X 为一随机变量， $E(X^2) = 1.1$ ， $D(X) = 0.1$ ， $E(X) > 0$ ，则一定有 ().
(A) $P\{-1 < X < 1\} \geq 0.9$ (B) $P\{0 < X < 2\} \geq 0.9$
(C) $P\{X + 1 \geq 1\} \leq 0.9$ (D) $P\{|X| \geq 1\} \leq 0.1$
3. 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立， $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ，则根据中心极限定

理, 当 n 充分大时, S_n 近似服从正态分布, 只要 $X_1, X_2, \dots, X_n$ ().

- (A) 有相同的数学期望. (B) 有相同的方差
(C) 服从同一指数分布. (D) 服从同一离散分布.

4. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots (n > 2)$ 为独立同分布的随机变量列, 且均服从参数为 $\lambda (\lambda > 1)$

的指数分布, 记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 ().

- (A) $\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\lambda\sqrt{n}} \leq x \right\} = \Phi(x)$ (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq x \right\} = \Phi(x)$
(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\lambda \sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}} \leq x \right\} = \Phi(x)$ (D) $\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq x \right\} = \Phi(x)$

5. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots (n > 2)$ 为独立同分布的随机变量列, 且均服从参数为

$\lambda (\lambda > 0)$ 的泊松分布, 当 n 充分大时, 下列选项正确的是 ().

- (A) $\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \sim N(0,1)$ (B) $\sum_{i=1}^n X_i \sim N(\lambda, n\lambda)$
(C) $\sum_{i=1}^n X_i \sim N(0,1)$ (D) $P \left\{ \sum_{i=1}^n X_i \leq x \right\} = \Phi(x)$

6. 设随机变量 $X_i (i = 1, 2, \dots)$ 相互独立, 具有同一分布, $EX_i = 0, DX_i = \sigma^2, k = 1, 2, \dots$,

则当 n 很大时, $\sum_{i=1}^n X_i$ 的近似分布是 ().

- (A) $N(0, n\sigma^2)$ (B) $N(0, \sigma^2)$ (C) $N(0, \sigma^2 / n)$ (D)

$N(0, \sigma^2 / n^2)$

7. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots (n > 2)$ 为独立同分布的随机变量列,

$EX_i = \mu, DX_i = \sigma^2 \neq 0$, 当 n 充分大时, 下列选项不正确的是 ().

- (A) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\frac{\mu}{n}, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ (B) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

$$(C) \sum_{i=1}^n X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$D) \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mu \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

8. 设 $\eta_n \sim B(n, p)$, $p \in (0,1)$, 当 n 充分大时, 下列选项不正确的是 ().

$$(A) \frac{\eta_n}{n} \text{ 依概率收敛于 } p$$

$$(B) \eta_n \sim N(np, np(1-p))$$

$$(C) \frac{\eta_n}{n} \sim N(p, \frac{p(1-p)}{n})$$

$$(D) \frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$$

三、解答题

1. 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 独立同分布, 且 $X \sim P(\lambda)$, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 试利用契比谢夫不等式估计 $P\{|\bar{X} - \lambda| < 2\sqrt{\lambda}\}$ 的下界。

2. 设 $E(X) = -1$, $E(Y) = 1$, $D(X) = 1$, $D(Y) = 9$, $\rho_{XY} = -0.5$, 试根据契比谢夫不等式估计 $P\{|X + Y| \geq 3\}$ 的上界。

3. 据以往经验, 某种电器元件的寿命服从均值为 100 小时的指数分布. 现随机地取 16 只, 设它们的寿命是相互独立的. 求这 16 只元件的寿命的总和大于 1920 小时的概率.

4. 某商店负责供应某地区 1000 人商品, 某种商品在一段时间内每人需要用一件的概率为 0.6, 假定在这一时间段各人购买与否彼此无关, 问商店应预备多少件这种商品, 才能以 99.7% 的概率保证不会脱销 (假定该商品在某一时间段内每人最多可以买一件).

5. 某种难度很大的手术成功率为 0.9, 现对 100 个病人进行这种手术, 用 X 记手术成功的人数, 求 $P\{84 < X < 95\}$.

6. 在一零售商店中, 其结帐柜台替顾客服务的时间 (以分钟计) 是相互独立的随机变量, 均值为 1.5, 方差为 1. 求对 100 位顾客的总服务时间不多于 2 小时的概率.

7. 已知笔记本电脑中某种配件的合格率仅为 80%, 某大型电脑厂商月生产笔记本电脑 10000 台, 为了以 99.7% 的把握保证出厂的电脑均能装上合格的配件, 问: 此生产厂商每月至少应购买该种配件多少件?

8. 已知一本 300 页的书中, 每页的印刷错误的个数服从参数为 0.2 的泊松分布, 试求整书中的印刷错误总数不多于 70 个的概率.

9. 设车间有 100 台机床, 假定每台机床是否开工是独立的, 每台机器平均开工率为 0.64, 开工时需消耗电能 a 千瓦, 问发电机只需供给该车间多少千瓦的电能就能以概率 0.99 保证车间正常生产?

10. 某保险公司的老年人寿保险有 1 万人参加, 每人每年交 200 元. 若老人在该年内死亡, 公司付给家属 1 万元. 设老年人死亡率为 0.017, 试求保险公司在一年内的这项保险中亏本的概率.

四、应用题

1. 某餐厅每天接待 400 名顾客, 设每位顾客的消费额 (单位: 元) 服从区间(20, 100) 上的均匀分布, 且顾客的消费额是相互独立的, 求该餐厅的日营业额在其平均营业额 ± 760 元内的概率.

2. 设某型号电子元件的寿命 (单位: 小时) 服从指数分布, 其平均寿命为 20 小时, 具体使用时当一元件损坏后立即更换另一新元件, 已知每个元件进价为 110 元, 试问在年计划中应为此元件作多少元的预算, 才可以有 95% 的把握保证一年的供应 (假定一年工作时间为 2000 小时).

3. 据调查某村庄中一对夫妻无孩子、有 1 个孩子、有 2 个孩子的概率分别为 0.05, 0.8, 0.15. 若该村共有 400 对夫妻, 试求: (1) 400 对夫妻的孩子总数超过 450 的概率; (2) 只有 1 个孩子的夫妻数不多于 340 的概率.

(B)

1. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^m}{m!} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, m 为正整数, 证明:

$$P\{0 < X < 2(m+1)\} \geq \frac{m}{m+1} \quad (\text{提示: 利用Chebyshev不等式}).$$

2. 设 $\{X_n : n \geq 1\}$ 为独立同分布的随机变量列, 其共同的分布如下表所示, 证明 $\{X_n\}$ 服从 Chebyshev 大数定律.

X_n	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$
p_k	1/4	1/2	1/4

3. 设随机变量列 $\{X_n : n \geq 1\}$ 为独立同分布,

$E(X_n) = 0, D(X_n) = \sigma^2 (0 < \sigma^2 < +\infty)$, 又 $E(X_n^4)$ 存在 ($n=1, 2, \dots$), 证明:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow{P} \sigma^2. \quad (\text{提示: 利用Chebyshev大数定律})$$