

第四章 向量组的线性相关性

第 1, 2 节 向量组及其线性组合, 向量组的线性相关性

教 学 主 要 内 容	1. 线性组合的定义; 2. 线性表示的充要条件。 3. 线性相关; 4. 线性无关。	
教 学 目 标	【知识目标】: ①理解并掌握线性组合的定义; ②掌握线性表示的充要条件, 并学会灵活应用。 【能力目标】: ①通过在教师引导下探索新知的过程, 培养学生观察、分析、判断、归纳的自学能力; ②锻炼学生联系、对应、转化的辩证思想。 【情感目标】: 通过探索、归纳、总结的过程, 激发学生观察、分析、探求的兴趣和热情, 培养学生积极探索的科学态度, 探索事物本质属性的欲望。	
教材 分析	重点	线性表示的充要条件, 向量组的线性相关和线性无关的判断。
	难点	线性表示的充要条件, 向量组的线性相关和线性无关的判断。
教学方法与手段	探究式教学法+黑板粉笔。	
学习方法	学生可利用教师精心准备的例题, 通过教师的引导, 不断观察、分析、探索、归纳总结。	
教 学 学时数	2 学时, 90 分钟。	

学生自学 10 分钟 102 页至 104 页的向量及其线性运算

重点强调 n 维向量空间的概念，利用类比的方法：空间点的集合即点空间，三维向量空间， n 维向量空间： n 维向量的全体组成的集合，记作

$$R^n = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in R \right\}$$

(一)复习引入

1. 想一想：线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \text{矩阵形式为 } Ax = b$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

它还可以写成其它形式吗？前面我们刚学过向量，它可以写成向量形式吗？如何来写？

$$\text{令 } \alpha_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} (j=1, 2, \dots, n), \quad \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

则 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = \beta$

2. 思考：既然线性方程组可以表示成向量形式，那么线性方程组解的情况，可以用矩阵之间的什么关系反应那？是否有解，就相当于向量 β 与向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的什么关系那？

带着这些问题，我们开始今天的课程。

(二)讲授新知

向量组的线性组合（讲的是一个向量与一个向量组的关系）

比如， $\beta = (2, -1, 1)^T$ ， $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T$ ， $\alpha_2 = (0, 1, 0)^T$ ， $\alpha_3 = (0, 0, 1)^T$ ，显然有

$$\beta = 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3,$$

如果向量 β 与向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 有以上的关系式成立，我们把这种情况称为，向量 β 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合，或者向量 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。

定义 1 (向量的线性组合与线性表示)

对于给定向量 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ，如果存在一组数 $k_1, k_2, \dots, k_s$ ，使关系式

$$\beta = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s$$

成立，则称向量 β 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性组合，或称向量 β 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示。

思考： $\varepsilon = (0, 0, 1)^T, \beta_1 = (0, 0, 0)^T, \beta_2 = (1, 1, 0)^T, \beta_3 = (1, 0, 0)^T$ ，也会有上面的关系式吗？

大家可能发现，要快速的回答这个问题，还有点难，于是下面的问题又摆在我们的眼前。

问题： 如何判断向量 β 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性组合？

例 向量 $\beta_1 = (4, 3, -1, 11)^T$ 可以由向量组 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 5)^T, \alpha_2 = (2, -1, 1, 1)^T$ 线性表示吗？

我们看问题的本质，可以线性表示时，这些 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 实质上就是对应的线性方程组的解，即是未知数的取值，不能线性表示时，即线性方程组无解的。

所以上面如何判断向量 β 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性组合的问题，即是线性方程组有无解的问题，而线性方程组有无解的问题，即是系数矩阵和增广矩阵的秩是否相等的问题。所以，向量 β 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性组合的问题的本质是，以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为列向量的矩阵的秩与以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 为列向量的矩阵秩是否相等的关系。

由此请看定理 1

定理 1 设向量 $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T, \alpha_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})^T (j=1, 2, \dots, n)$ ，则向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示的充分必要条件是：以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为列向量的矩阵与以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ 为列向量的矩阵有相同的秩。

使用该定理可以判断是否可以线性表示，那若是可以线性表示了，那这组数如何求？

请同学回答。其本质就是对现行方程组的求解过程。

思考： 向量 $\beta_2 = (4, 3, 0, 11)^T$ 可以由向量组 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 5)^T, \alpha_2 = (2, -1, 1, 1)^T$ 线性表

示吗？若是，写出表示式。

例 判断向量 $\beta_1 = (4, 3, -1, 11)^T$ 与 $\beta_2 = (4, 3, 0, 11)^T$ 是否各为向量组 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 5)^T$, $\alpha_2 = (2, -1, 1, 1)^T$ 的线性组合。若是，写出表达式。

下面的内容是研究两个向量组之间的关系（有时间的话可以详细一点，没时间的话可以大概讲一下便可）

即两个向量组等价的性质：自反性，对称性，传递性

设向量组

$$(A) \quad \varepsilon_1 = (1, 0, 0)^T, \varepsilon_2 = (0, 1, 0)^T, \varepsilon_3 = (0, 0, 1)^T$$

$$(B) \quad \alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \alpha_3 = (1, 1, 1)^T$$

$$(C) \quad \beta_1 = (0, 0, 0)^T, \beta_2 = (1, 1, 0)^T, \beta_3 = (1, 0, 0)^T$$

请研究下面的问题

(1) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 分别可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示吗？

(2) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 分别可由向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 线性表示吗？

即 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A$, A 称为系数矩阵

108 页的 2-8 题。

总结：设有两个向量组 (A) 及 (B)，如果 (A) 中每一向量都可由组 (B) 线性表示，则称向量组 (A) 可由向量组 (B) 线性表示。

设有两个向量组 (A) 及 (B)，如果向量组 (A)，(B) 可以相互线性表示，则称向量组 (A) 与 (B) 等价。

请同学们研究向量组等价的性质：自反性，对称性，传递性。

3.3 向量组的线性相关性

前面我们研究的问题，其实是和非齐次线性方程组的解对应的问题；

下面我们研究和齐次线性方程组的解对应的问题

1. 想一想：线性方程组：

向量形式为 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$, 其中, $\alpha_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} (j=1,2,\cdots,n)$,

$$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

当 $\beta = 0$, $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$, 是齐次线性方程组的向量形式。

齐次线性方程组除零解外, 是否还有其它解? 什么情况有非零解?

例如 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ -6x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$ 的解有 0, 0 和 2, 3, 说明向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 与零向量

之间可以线性表示, 并且**系数不唯一**。

$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ 只有零解, 说明向量 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 与零向量之间可以线性表示

且表示唯一, 即**系数为零**。

(二) 讲授新知

鉴于上面系数为零和不为零的问题, 给出下面的定义

定义 1 (向量组的线性相关性)

对于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, 如果存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$, 使关系式

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

成立, 则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关, 如果上式当且仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$ 时成立, 则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关。

比如上面的问题 α_1, α_2 线性相关, β_1, β_2 线性无关。

问题: 如何判断线性相关和无关, 它们和齐次线性方程组的解之间有着怎么的关系?

线性相关实质上线性方程组有非零解, 线性无关实质是线性方程组只有零解。

齐次线性方程组有非零解的充要条件是: 系数矩阵的秩小于未知数的个数。

比如上面的两个线性方程组一个秩为 1, 一个秩为 2。

例 1 判断向量组 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 5)^T$, $\alpha_2 = (2, -1, 1, 1)^T$, $\alpha_3 = (4, 3, -1, 11)^T$ 是否线性相

关？

类推得：

定理 1 对于 m 维列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ，其中

$$\alpha_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关的充分必要条件是：以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为列向量的矩阵的秩小于向量的个数 n 。

例 2 判断向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 0, 1)^T$ ， $\alpha_2 = (1, 3, 0, -1)^T$ ， $\alpha_3 = (-1, -1, 1, 0)^T$ 是否线性相关？

推论 1 S 个 n 维列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关（线性相关）的充要条件是：矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 的秩等于（小于）向量的个数 S 。

例 3 判断向量组 $\alpha_1 = (1, 0, -1)^T$ ， $\alpha_2 = (-2, 2, 0)^T$ ， $\alpha_3 = (3, -5, 2)^T$ 是否线性相关？

问题：对 n 个 n 维向量线性相关的充要条件是什么？

推论 2 n 个 n 维向量 $\alpha_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})^T$ ，则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关的充要

条件是：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

例 4 判断向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 2, 3)^T$ ， $\alpha_2 = (1, -1, 1, 1)^T$ ， $\alpha_3 = (1, 3, 3, 5)^T$ ， $\alpha_4 = (4, -2, 5, 6)^T$ ， $\alpha_5 = (-3, -1, -5, -7)^T$ 是否线性相关？

请同学们一起学习课本 110 页的例 1，例 2

问题：当向量组中所含向量的个数大于向量的维数时，此向量组线性相关还是无关？（其实就是 $m < n$ ，方程个数小于未知数个数的情况）。

推论 3 向量组中所含向量的个数大于向量的维数时，此向量组线性相关。

问题：如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 中的 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，则整个向量组线性相关还是线性无关？

定理 2 如果向量组中有一部分向量（称为部分组）线性相关，则整个向量组线性相关。

教 学 过 程	问题：定理 1 的逆否命题是什么？ 下面看一点线性相关，线性无关的证明题 111 页例 1, 2, 3 证明：如果向量组 α, β, γ 线性无关，则向量组 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ 亦线性无关。 习题 3.3, 1-5 (三) 课堂小结 1. 会熟练的判断一个向量组是线性相关还是线性无关； 2. 会证明简单的向量组的线性相关和线性无关。 思考题： 请说出向量组的线性相关与无关与齐次线性方程组的解之间的关系？ (三) 课堂小结 灵活的掌握，并熟练的应用线性表示的充要条件。 思考题：向量组的线性组合与线性方程组的解之间的本质联系是什么？
----------------------------	---

第四章 向量组的线性相关性

第 3 节 向量组的秩

教学主要内容	1. 向量组的最大线性无关组; 2. 向量组的秩。	
教学目标	【知识目标】: ①理解并掌握向量组的最大线性无关组; ②掌握向量组的秩的计算, 并学会灵活应用。 【能力目标】: ①通过在教师引导下探索新知的过程, 培养学生观察、分析、判断、归纳的自学能力; ②锻炼学生联系、对应、转化的辩证思想。 【情感目标】: 通过探索、归纳、总结的过程, 激发学生观察、分析、探求的兴趣和热情, 培养学生积极探索的科学态度, 探索事物本质属性的欲望。	
教材分析	重点	向量组的秩。
	难点	向量组的秩。
教学方法与手段	探究式教学法+黑板粉笔	
学习方法	学生可利用教师精心准备的例题, 通过教师的引导, 不断观察、分析、探索、归纳总结.	
教学学时数	2 学时, 90 分钟。	

(一)复习引入

想一想：依次请回答下面的问题

(1) $\alpha_1 = (2, 4, 2)^T$ 线性相关还是无关？ 答案： 无关

$\alpha_1 = (2, 4, 2)^T, \alpha_2 = (1, 1, 0)^T$ 线性相关还是线性无关？ 答案： 无关

$\alpha_1 = (2, 4, 2)^T, \alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \alpha_3 = (2, 3, 1)^T$ 线性相关还是线性无关？ 答案： 相关

$\alpha_1 = (2, 4, 2)^T, \alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \alpha_4 = (3, 5, 2)^T$ 线性相关还是线性无关？ 答案： 相关

向量组 $\alpha_1 = (2, 4, 2)^T, \alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \alpha_3 = (2, 3, 1)^T, \alpha_4 = (3, 5, 2)^T$ 线性相关还是无关？ 答案： 相关

(2) 向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 2)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (3, -1, 4)^T, \alpha_4 = (1, 1, 1)^T$ 中，

$\alpha_1 = (1, 0, 2)^T$ 线性相关还是线性无关？

$\alpha_1 = (1, 0, 2)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T$ 线性相关还是线性无关？

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关还是无关？ 答案： 无关

$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关还是无关？ 答案： 无关

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关还是无关？ 答案： 无关

2. 思考： 以上问题我们发现了怎么样的一种零界状态？

(二)讲授新知

上面问题 1 中的 α_1, α_2 称为一个向量组的一个部分组，并且它还具有特点自身线性无关，但是再添加一个向量 α_3 或 α_4 它们就线性相关了，换做专业的语言应该是

若向量组中有 r 个向量线性无关，而该向量组中任意的 $r+1$ 个向量都线性相关，则称 r 为向量组的秩。

定义 1 设有向量组 A ，如果在 A 中能选出 r 个向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ ，满足

(1) 向量组 $A_0: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关；

(2) 向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量（如果 A 中有 $r+1$ 的话）都线性相关，那么称向量组 A_0 是向量组 A 的一个最大线性无关向量组（简称最大无关组），最大无关

组所含向量个数 r 称为向量组 A 的秩, 记作 R_A 。

请回答上述引例中的最大无关组, 发现第一个向量组有两个最大无关组, 并且它们中所含的向量个数是相同的 (说明: 向量组的最大线性无关组不唯一, 但是它们所含向量的个数相同), 这个特点又是向量的什么本质那? 第二个问题的最大线性无关组就是向量组其本身。

例 1 向量组 $\alpha_1 = (0, 1)^T, \alpha_2 = (1, 0)^T, \alpha_3 = (1, 1)^T, \alpha_4 = (0, 2)^T$, α_1, α_2 线性相关还是无关?

α_2, α_3 线性相关还是无关? $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关还是无关? $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关还是无关?

向量组与其最大无关组可互相线性表示, 即向量组与其最大无关组等价。

定义 2 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的最大无关组所含向量的个数, 称为向量组的秩, 记为 $R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 。

规定, 全由零向量组成的向量组的秩为零。

回答上述向量组的秩。

如何求一个向量组的秩, 例求向量组

$\alpha_1 = (1, 0, 2)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (3, -1, 4)^T, \alpha_4 = (1, 1, 1)^T$ 的秩? 向量组的秩和向量组成的矩阵的秩之间有什么关系?

矩阵 A 的行向量组的秩称为矩阵 A 的行秩; 矩阵 A 的列向量组的秩称为矩阵 A 的列秩。

定理 1 A 为 $m \times n$ 矩阵, 则 $R(A) = r$ 的充分必要条件是: A 的列(行)秩为 r .

推论 矩阵 A 的行秩与列秩相等.

相关结论

如果对矩阵 A 仅施以初等行变换化为矩阵 $\bar{A}$, 则 $\bar{A}$ 的列向量组与 A 的列向量组间有相同的线性关系, 即: 矩阵的初等行(列)变换不改变其列(行)向量间的线性关系.

简言之, 矩阵的初等行(列)变换不改变其列(行)向量间的线性关系。

现在请计算上面的问题, 并把其余向量用该极大无关组线性表示。

例 2 求向量组 $\alpha_1 = (2, 4, 2)^T, \alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \alpha_3 = (2, 3, 1)^T, \alpha_4 = (3, 5, 2)^T$ 的一个最大无关组, 并把其余向量用该最大无关组线性表示。

教 学 过 程	归纳总结：如果需求出一个向量组的最大无关组或秩，并将其余向量用此最大无关组线性表示，只需由此向量组构造矩阵 A，要求各向量作为 A 的列向量，并将 A 化为简化的阶梯形矩阵。 （三）课堂小结 1. 向量组的最大线性无关组的定义，向量组的秩的定义； 2. 向量组的秩的计算方法。 思考题： 向量组的秩与矩阵的秩之间的本质联系？
------------------	---

第四章 向量组的线性相关性

第 4 节 线性方程组解的结构

教学主要内容	1. 齐次线性方程组解的结构; 2. 非齐次线性方程组解的结构。	
教学目标	【知识目标】: ①理解并掌握齐次线性方程组解的性质; ②掌握齐次线性方程组的基础解系的计算, 并学会灵活应用。①理解并掌握非齐次线性方程组解的结构; ②掌握非齐次线性方程组的全部解的求法。 【能力目标】: ①通过在教师引导下探索新知的过程, 培养学生观察、分析、判断、归纳的自学能力; ②锻炼学生联系、对应、转化的辩证思想。 【情感目标】: 通过探索、归纳、总结的过程, 激发学生观察、分析、探求的兴趣和热情, 培养学生积极探索的科学态度, 探索事物本质属性的欲望。	
教材分析	重点	齐次线性方程组解的性质; 齐次线性方程组的基础解系; 非齐次线性方程组解的结构。
	难点	齐次线性方程组解的性质; 齐次线性方程组的基础解系; 非齐次线性方程组解的结构。
教学方法与手段	探究式教学法+黑板粉笔。	
学习方法	学生可利用教师精心准备的例题, 通过教师的引导, 不断观察、分析、探索、归纳总结。	
教学学时数	2 学时, 90 分钟。	

线性方程组解的结构

(一)复习引入

1. 想一想：求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 8x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_4 + 6x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

教
学
过
程

$$\text{解得 } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 8 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 - 3x_5 \\ x_3 = 4x_4 - 5x_5 \end{cases}, \text{ 取 } x_2 = k_1, x_4 = k_2, x_5 = k_3 \text{ (其中 } k_1, k_2, k_3 \text{ 为任意常数),}$$

$$\text{则方程组的全部解为 } \begin{cases} x_1 = -2k_1 - k_2 - 3k_3 \\ x_2 = k_1 \\ x_3 = 4k_2 - 5k_3 \\ x_4 = k_2 \\ x_5 = k_3 \end{cases}$$

并且在这个过程中自由未知量个数是 3，增广矩阵的秩是 2，它们的和是未知数的个数 5。

2. 思考：为什么上述结果代表了方程组的全部解？全部解的表示还有其他形式吗？全部解的书写还可以简化吗？

(二)讲授新知

下面我们研究齐次线性方程组解的结构

我们知道齐次线性方程组的矩阵形式为 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ，其中 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ， $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

请同学们回答下面的三个问题，并说出为什么？

(1) 如果 ξ_1, ξ_2 是齐次线性方程组的两个解，则 $\xi_1 + \xi_2$ 是它的解吗？

(2) 如果 ξ 是齐次线性方程组的解，则 $c\xi$ (c 是常数) 是它的解吗？

(3) 如果 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 都是齐次线性方程组的解, 则其线性组合 $c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \dots + c_s\xi_s$ ($c_1, c_2, \dots, c_s$ 是任意常数) 是它的解吗?

发现: 如果一个齐次线性方程组有非零解, 则它就有无穷多解, 并且这无穷多解构成一个 n 维向量组。

思考: 全部解该如何表示?

我们学过, 一个向量组的最大无关组可以表示这个向量组, 所以齐次线性方程组的全部解可以用解向量组的一个最大无关组的线性组合表示。

问题: 如何求这个向量组的最大无关组?

下面给这个最大无关组给一个新的名字

定义 1 如果 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 是齐次线性方程组的解向量组的一个最大无关组, 则称 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 是齐次线性方程组的一个基础解系。

思考: 任意齐次线性方程组的基础解系都存在吗? 如何求线性方程组的基础解系? 方程基础解系中所含解的个数和系数矩阵的秩有什么关系?

定理 1 如果齐次线性方程组的系数矩阵 A 的秩 $R(A) = r < n$, 则方程组的基础解系存在, 且每个基础解系中, 恰含有 $n-r$ 个解。

注意: 当齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的系数矩阵 $A_{m \times n}$ 的秩 $R(A) = n$ 时, 方程组不存在基础解系, 方程组 $Ax = 0$ 仅有零解。

比如上面的问题的解是

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 - 3x_5 \\ x_3 = 4x_4 - 5x_5 \end{cases}, \text{ 其中 } x_2, x_4, x_5 \text{ 是自由未知量, 让自由未知量 } \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \text{ 分别取 } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 则 } \xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 就是方程组的一个基础解系, 那}$$

么 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3$ 表示全部解。

回过头看开始的问题的求解, 进行归纳

1. 对增广矩阵施以初等行变换, 将其变为阶梯形

2. 用 x_2, x_4, x_5 表示 x_1, x_3 写出方程组的解,

3. 给自由未知量 x_2, x_4, x_5 取值 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 就得出了方程组的基础解系 ξ_1, ξ_2, ξ_3 。

4. 知道基础解系就可以写出全部解。

求如下齐次线性方程组的一个基础解系, 并用基础解系表示全部解

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

思考题:

非齐次线性方程组的解会有和齐次线性方程组的解一样的性质吗?

(一)复习引入

1. 想一想: 我们知道非齐次线性方程组可以表示为 $Ax = b$, 前面对齐次线性方程组解的性质, 对非齐次的还成立吗?

2. 思考: 非齐次线性方程组会有什么性质?

(二)讲授新知

当非齐次线性方程组中的 $b = 0$, 就得到齐次线性方程组 $Ax = 0$, 称它为非齐次线性方程组的导出组。

研究非齐次线性方程组的解和它的导出组的解之间会有什么性质?

问题 1 设 η , η_1, η_2 是 $Ax = b$ 的解, ξ 是 $Ax = 0$ 的解, 则

(1) $\eta_1 + \eta_2$ 是 $Ax = b$ 的解吗? $\eta_1 - \eta_2$ 是 $Ax = b$ 的解吗? $k\eta$ 是 $Ax = b$ 的解吗?

(2) $\eta + \xi$ 会是谁的解?

请同学们回答

将上述结果归纳得到:

$\eta + \xi$ 是 $Ax = b$ 的解, $\eta_1 - \eta_2$ 是 $Ax = 0$ 的解。

以上就是非齐次线性方程组的解与它的导出组的解之间的性质。

非齐次线性方程组的解会有什么样的结构? 或者非齐次线性方程组的全部解该如

何表示？

根据上面的性质，知道 $\eta + \xi$ 是 $Ax = b$ 的解，那么 $Ax = b$ 的任意一个解 η^* 一定是 η 与 $Ax = 0$ 的某一个解 ξ_1 的和吗？

令 $\xi_1 = \eta^* - \eta$ ，则 ξ_1 一定是 $Ax = 0$ 的解，那么 $\eta^* = \xi_1 + \eta$ ，即上面的回答是肯定的。

则会得到下面的结论

定理 1 如果 η 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的一个解， ξ 是 $Ax = 0$ 的全部解，则 $x = \eta + \xi$ 是非齐次线性方程组的全部解。

思考：如果非齐次线性方程组有解，则其全部解该如何表示？

$x = \eta + c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r}$ ，其中 η 是非齐次线性方程组的一个解， $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 是导出组的基础解系。

问题 2 请回答非齐次线性方程组的全部解的求解过程？

例 求线性方程组的全部解

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases} \text{ 的解}$$

请同学们回答解题过程。

解：作方程组的增广矩阵 $(A:b)$ ，并对它施以初等行变换：

$$(A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -1 & \vdots & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & \vdots & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & \vdots & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{13}{7} & \vdots & \frac{13}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & \vdots & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

即原方程组与方程组

$$\begin{cases} x_1 = \frac{13}{7} - \frac{3}{7}x_3 - \frac{13}{7}x_4 \\ x_2 = -\frac{4}{7} + \frac{2}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4 \end{cases}$$

同解，其中 x_3, x_4 为自由未知量。

让自由未知量 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ 取值 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，得方程组的一个解 $\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \frac{13}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

原方程组的导出组与方程组

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{7}x_3 - \frac{13}{7}x_4 \\ x_2 = \frac{2}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4 \end{cases}$$

同解，其中 x_3, x_4 为自由未知量。

对自由未知量 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ 取值 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ， $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，即得导出组的基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{13}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

因此所给方程组的全部解为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta} + c_1 \boldsymbol{\xi}_1 + c_2 \boldsymbol{\xi}_2$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{13}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{13}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } c_1, c_2 \text{ 为任意常数。}$$

通过该例题的讲解，请同学们回答非齐次线性方程组的求解步骤。

例题拓展:

第一类型:

例 1 设四元非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的系数矩阵的秩 $R(A) = 3$, η_1, η_2, η_3 是 $Ax = \beta$ 的三个解向量, 且 $\eta_1 = (1, 2, 3, 4)^T$, $\eta_2 + \eta_3 = (2, 3, 4, 5)^T$, 求 $Ax = \beta$ 的通解.

已知方程组是四元, 且 $R(A) = 3$, 则由非齐次线性方程组解的结构知, 导出组的基础解析中仅含有一个向量, 设为 ξ

$$\xi = 2\eta_1 - (\eta_2 + \eta_3) = (2, 4, 6, 8)^T - (2, 3, 4, 5)^T = (0, 1, 2, 3)^T$$

又因为非齐次线性方程组有特解 $\eta_1 = (1, 2, 3, 4)^T$

则非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解为 $x = \eta_1 + k\xi$, $k \in \mathbb{R}$

例 2 设四元非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的系数矩阵的秩 $R(A) = 2$, η_1, η_2, η_3 是 $Ax = \beta$ 的三个解向量, 且 $\eta_1 = (4, 3, 2, 1)^T$, $\eta_2 = (1, 3, 5, 1)^T$, $\eta_3 = (-2, 6, 3, 2)^T$ 求 $Ax = \beta$ 的通解.

例 3 设四元非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的系数矩阵的秩 $R(A) = 3$, 已知它的三个解向量为 η_1, η_2, η_3 , 其中 $\eta_1 = (3, -4, 1, 2)^T$, $\eta_2 + \eta_3 = (4, 6, 8, 0)^T$, 求 $Ax = \beta$ 的通解.

第二类型:

例 4 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & t & t \\ 1 & t & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解析含有 2 个线性无

关的解向量, 试求方程组 $Ax = 0$ 的全部解.

第三类型:

求出一个齐次线性方程组, 使它的基础解系由下列向量组成:

$$\xi_1 = (1, 2, 3, 4)^T, \quad \xi_2 = (4, 3, 2, 1)^T$$

(三) 课堂小结

1. 熟练的掌握齐次线性方程组解的性质; 2. 理解并会求齐次线性方程组的基础解系。3. 熟练掌握非齐次线性方程组的解的结构, 并会求解非齐次线性方程组.

第四章 向量组的线性相关性

第 5 节 向量空间

教学主要内容	1. 向量空间与子空间的定义; 2. 向量空间的基与维数。	
教学目标	【知识目标】: 理解并掌握向量空间与子空间的定义, 向量空间的基与维数 【能力目标】: ①通过在教师引导下探索新知的过程, 培养学生观察、分析、判断、归纳的自学能力; ②锻炼学生联系、对应、转化的辩证思想。 【情感目标】: 通过探索、归纳、总结的过程, 激发学生观察、分析、探求的兴趣和热情, 培养学生积极探索的科学态度, 探索事物本质属性的欲望。	
教材分析	重点	向量空间与子空间的定义; 向量空间的基与维数。
	难点	向量空间的基与维数。
教学方法与手段	探究式教学法+黑板粉笔。	
学习方法	学生可利用教师精心准备的例题, 通过教师的引导, 不断观察、分析、探索、归纳总结。	
教学学时数	2 学时, 90 分钟。	

第二节我们了解过， n 维向量空间指的是 n 维向量全体组成的集合

$$R^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in R\}$$

今天对于这个问题，我们重新认识，并给出严格的定义

1. 向量空间

定义 1 设 V 为 n 维向量的集合，若集合 V 非空，且集合 V 对于 n 维向量的加法及数乘两种运算封闭，即

(1) 若 $\alpha \in V$, $\beta \in V$, 则 $\alpha + \beta \in V$,

(2) 若 $\alpha \in V$, $\lambda \in R$, 则 $\lambda\alpha \in V$,

则称集合 V 为 R 上的向量空间。

记所有 n 维向量的集合为 R^n , R^n 为 n 维向量空间。

$n=1$ 表示数轴, $n=2$ 表示平面, $n=3$ 表示实体空间。

判断集合是否为向量空间的方法就是定义法

例 1 对如下定义的两个集合，试判断是否为向量空间

$$(1) S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}, x \in R \right\}; \quad (2) S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, x \in R \right\}$$

例 2 判断下列集合是否为向量空间: $V_1 = \{x = (0, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in R\}$

例 3 判别下列集合是否为向量空间:

$$V_2 = \{x = (1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in R\}$$

2. 子空间的定义

定义 2 设有向量空间 V_1 和 V_2 , 若向量空间 $V_1 \subset V_2$, 则称 V_1 是 V_2 的子空间。

阅读课本例 7, 例 8

3. 向量空间的基与维数

例 4 设 α, β 为两个已知的 n 维向量, 集合 $V = \{\xi = \lambda\alpha + \mu\beta \mid \lambda, \mu \in R\}$ 是向量空间, 这个空间称为由 α, β 所生成的向量空间。

生成向量空间的向量组是什么? 怎么找到?

定义 3 设 V 是向量空间, 若有 r 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in V$, 且满足

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关,

(2) V 中任一向量都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示。

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 为向量空间 V 的一个基, 数 r 称为向量空间 V 的维数, 记为 $\dim V = r$ 。

注: 向量空间 V 的基就是向量组的极大无关组, V 的维数就是向量组的秩。

例 5 证明单位向量组是 n 维向量空间的一个基。

例 6 给定向量组 $\alpha_1 = (-2, 4, 1)^T, \alpha_2 = (-1, 3, 5)^T, \alpha_3 = (2, -3, 1)^T, \beta = (1, 1, 3)^T$, 试证明:

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三维向量空间的一个基。并将向量 β 用这个基线性表示。

4. R^3 中坐标变换公式

求 R^3 中两组基之间的关系,

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$$

$$\text{设 } A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

$$\text{因为 } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)A, \quad (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)B$$

$$\text{则 } (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A^{-1}, \quad \text{即 } (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A^{-1}B$$

例 7 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为三维空间向量的一组基, 而 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 与 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 为 V 中两个向量组, 且

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \beta_2 = \alpha_1 - \alpha_3 \\ \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} \gamma_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 \\ \gamma_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 \\ \gamma_3 = 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 \end{cases}$$

(1) 验证 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 与 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 都是 V 的基;

(2) 求由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 到 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 的过渡矩阵。