

第2章 矩阵及其运算

线性方程组和矩阵

矩阵的运算

逆矩阵

克拉默法则

矩阵分块法

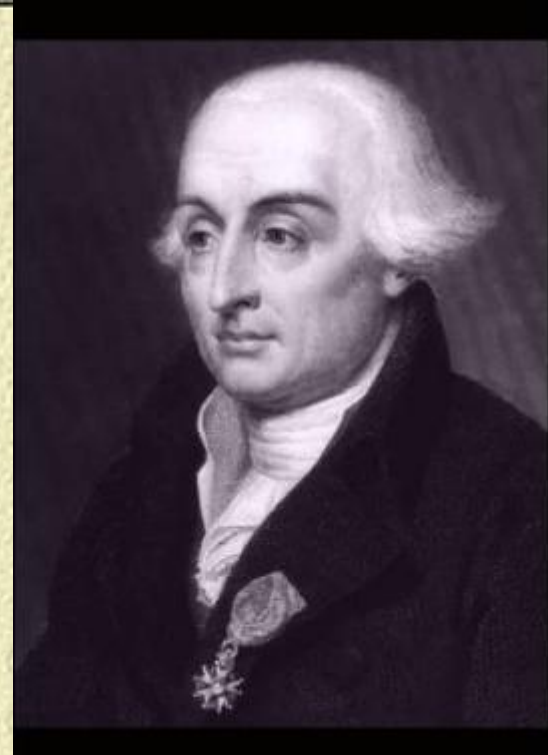
上页

下页

返回

一、矩阵的历史渊源

18世纪，法国数学家，拉格朗日就已经用到矩阵的概念了。



约瑟夫·拉格朗日（Joseph-Louis Lagrange, 1736~1813）全名为约瑟夫·路易斯·拉格朗日，法国著名数学家、物理学家。1736年1月25日生于意大利都灵，1813年4月10日卒于巴黎。他在数学、力学和天文学三个学科领域中都有历史性的贡献，其中尤以数学方面的成就最为突出。

上页

下页

返回

一、矩阵的历史渊源

“矩阵（Matrix）”这个词首先是英国数学家西尔维斯特使用的。



曾就读于剑桥约翰学院。1838年任伦敦大学学院教授。1841年受聘任美国弗吉尼亚大学数学教授，几个月后辞职。1845年返回伦敦。1846年进入内殿法学会，1850年成为律师。1855—1870年任乌尔维奇皇家陆军军官学校数学教授。1859年被选为伦敦皇家学会会员。1868年当选为伦敦数学会主席。1876年任美国约翰·霍普金斯大学数学教授。1883年返回英国，任牛津大学几何学的萨维尔教授。

一、矩阵的历史渊源

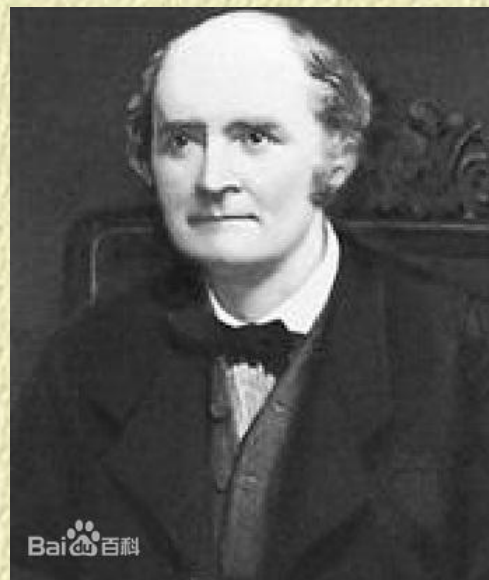
“矩阵（Matrix）”这个词首先是英国数学家西尔维斯特使用的。



西尔维斯特的贡献主要在代数学方面。他同凯莱一起，发展了行列式理论，创立了代数型的理论，共同奠定了关于代数不变量的理论基础。他创造了许多数学名词，当代数学中常用到的术语，如不变式、判别式、雅可比行列式等都是他引入的。

一、矩阵的历史渊源

英国数学家凯莱，被公认为矩阵理论的创立者，他首先把矩阵作为一个独立的数学概念，并发表了一系列关于矩阵的论文。



凯莱最主要的贡献是与J.J.西尔维斯特一起，创立了代数型的理论，共同奠定了关于代数不变量理论的基础。他是矩阵论的创立者。他对几何学的统一研究也作了重要的贡献。凯莱在劝说剑桥大学接受女学生中起了很大的作用。他曾任剑桥哲学会、伦敦数学会、皇家天文学会的会长。

第一节 矩 阵

- 一、矩阵概念的引入
- 二、矩阵的定义
- 三、小结 思考题

一、矩阵概念的引入

[illegible]

的解取决于

系数 $a_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n),$

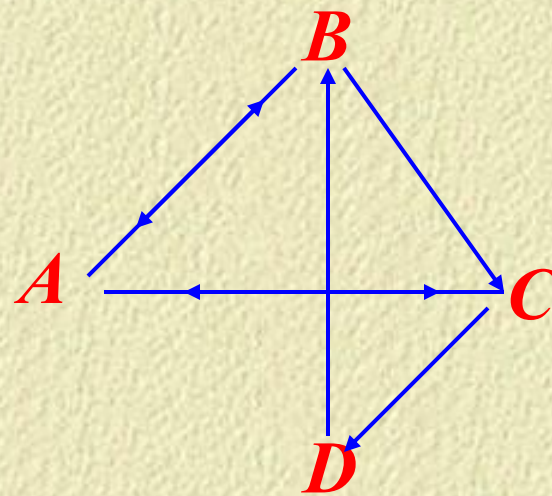
常数项 $b_i (i=1,2,\cdots,n)$

线性方程组的系数与常数项按原位置可排为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

对线性方程组的研究可转化为对这张表的研究.

2. 某航空公司在A,B,C,D四城市之间开辟了若干航线, 如图所示表示了四城市间的航班图, 如果从A到B有航班, 则用带箭头的线连接 A 与B.



四城市间的航班图情况常用表格来表示:

到站

发站

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>A</i>		✓	✓	
<i>B</i>	✓		✓	
<i>C</i>	✓			✓
<i>D</i>		✓		

其中 ✓ 表示有航班.

为了便于计算,把表中的 ✓ 改成1,空白地方填上0,就得到一个数表:

上页

下页

返回

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>A</i>				
<i>B</i>				
<i>C</i>				
<i>D</i>				

0	1	1	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	0	0

这个数表反映了四城市间交通联接情况。

二、矩阵的定义

由 $m \times n$ 个数 a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$)
排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}$$

称为 $m \times n$ 矩阵. 简称 $m \times n$ 矩阵. 记作

主对角线

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

副对角线

矩阵 A 的
 (m, n) 元

简记为 $A = A_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n} = (a_{ij})$.

这 $m \times n$ 个数称为 A 的元素, 简称为元.

元素是实数的矩阵称为实矩阵,

元素是复数的矩阵称为复矩阵.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -9 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 是一个 2×4 实矩阵,

$\begin{pmatrix} 13 & 6 & 2i \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 是一个 3×3 复矩阵, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

是一个 3×1 矩阵,

$(2 \ 3 \ 5 \ 9)$

(4)

是一个 1×4 矩阵,

是一个 1×1 矩阵.

几种特殊矩阵

(1) 行数与列数都等于 n 的矩阵 A , 称为 n 阶方阵. 也可记作 A_n .

例如 $\begin{pmatrix} 13 & 6 & 2i \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 是一个3阶方阵.

(2) 只有一行的矩阵

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

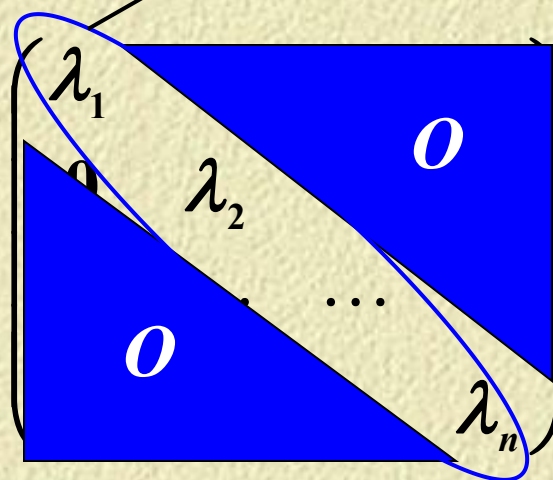
称为行矩阵(或行向量).

只有一列的矩阵

$$B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \text{ 称为列矩阵 (或列向量).}$$

不全为0

(3) 形如



的方阵, 称为**对角矩阵** (或**对角阵**) .

记作 $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$

(4) 元素全为零的矩阵称为**零矩阵**, $m \times n$ 零矩阵记作 $O_{m \times n}$ 或 O .

注意 不同阶数的零矩阵是不相等的.

例如
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0).$$

(5)方阵

$$E = E_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

全为1

称为单位矩阵（或单位阵）。

同型矩阵与矩阵相等的概念

1. 两个矩阵的行数相等, 列数相等时, 称为同型矩阵。

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ 为同型矩阵.

2. 两个矩阵 $A = (a_{ij})$ 与 $B(b_{ij})$ 为同型矩阵, 并且对应元素相等, 即

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n),$$

则称**矩阵 A 与 B 相等**, 记作 $A = B$.

例1 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与 m 个变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 之间的关系式

[illegible]

表示一个从变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \dots, y_m$ 的线性变换.

其中 a_{ij} 为常数.

[illegible]

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \cdots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \cdots & \mathbf{a}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{a}_{m1} & \mathbf{a}_{m2} & \cdots & \mathbf{a}_{mn} \end{pmatrix}$$

系数矩阵

线性变换与矩阵之间存在着一一对应关系.

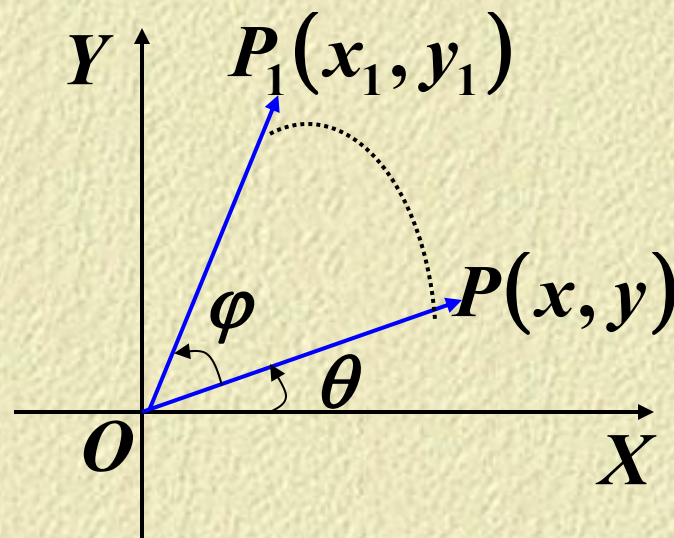
若线性变换为 $\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \dots\dots\dots \\ y_n = x_n \end{cases}$ 称之为恒等变换.

$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \dots\dots\dots \\ y_n = x_n \end{cases}$ $\xleftrightarrow{\text{对应}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ 单位阵.

线性变换

$$\begin{cases} x_1 = \cos \varphi x - \sin \varphi y, \\ y_1 = \sin \varphi x + \cos \varphi y. \end{cases} \quad \xleftrightarrow{\text{对应}} \quad \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

这是一个以原点为中心
旋转 φ 角的旋转变换.



例2 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & x & 3 \\ y & 1 & z \end{pmatrix},$$

已知 $A = B$, 求 x, y, z .

解 $\because A = B,$

$$\therefore x = 2, \quad y = 3, \quad z = 2.$$

三、小结

(1) 矩阵的概念 m 行 n 列的一个数表

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(2) 特殊矩阵 {

- 方阵 ($m = n$);
- 行矩阵与列矩阵; $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$,
- 单位矩阵; $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$
- 对角矩阵;
- 零矩阵.

思考题

矩阵与行列式的有何区别？

思考题解答

矩阵与行列式有本质的区别，行列式是一个算式，一个数字行列式经过计算可求得其值，而矩阵仅仅是一个数表，它的行数和列数可以不同.