

案例：置信度的计算（大数定律）

应用背景：数字通信系统中的许多元件都必须满足一项有关误码率（ $P(\varepsilon)$ ）的最低规范。

对于一个给定系统，在输入端送入某种预定形式的比特流，然后检测其输出，通过与输入相比较可以估测出（ $P(\varepsilon)$ ）。输出与输入之间的任何一个差错均视为一次误码。检测到的错

误位数（ ε ）与已经传送的总位数（ n ）之比即为误码率（ $\hat{P}(\varepsilon)$ ），其表示是真实误码率

（ $P(\varepsilon)$ ）的估计，估计的准确度随传送位数的增加而改进。由**大数定律**，其关系可表示为：

$$\hat{P}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(\varepsilon) \quad [1]$$

重要的是，必须传送、测试足够数目的比特数才能保证 $\hat{P}(\varepsilon)$ 是 $P(\varepsilon)$ 的合理近似，所以，对于合理限制的测试时间，我们有必要知道完成一个统计有效的测试所需的最少位数。

分析：

在许多场合，我们仅仅需要验证 $P(\varepsilon)$ 是否好于某预定标准。换句话说，只要证明 $P(\varepsilon)$ 比某一上限低即可。例如，许多通信系统要求 $P(\varepsilon)$ 达到 10^{-10} 或更好（上限为 10^{-10} ）。统计学中有关加以上限的置信度概念可以用来推测，在某个量化的可信度前提下，真实 $P(\varepsilon)$ 低于规定上限。这种方法带来的主要好处，就是容许你在测试时间和测试精度之间进行折衷。

问题的解决：

（1）统计置信度的定义

统计置信度定义为，经过一系列试验，某事件的实际概率优于规定水平的几率（该定义中的实际概率是指，有限次测量所得概率在试验次数趋向无限时的极限值）。应用于 $P(\varepsilon)$ 估计，

统计置信度可重新阐述为，（基于 n 位传送中检测到 ε 个错误）真实 $P(\varepsilon)$ 优于规定水平 γ （如 10^{-10} ）的概率。用数学语言表示为：

$$CL = P\{P(\varepsilon) < \gamma \mid \varepsilon, n\}$$

其中，CL 为置信度。由定义，CL 为概率，因此其在 $[0,1]$ 取值。

计算出统计置信度之后就可以讲，我们有百分之 CL 的把握相信， $P(\varepsilon)$ 优于 γ 。另外一种

表达，如果我们多次重复测量误码率，并对每个测量周期重复计算 $\hat{P}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{n}$ ，那么可以预

测，有百分之 CL 的 $\hat{P}(\varepsilon)$ 优于 γ 。

(2) 置信度的计算

置信度的计算利用二项分布的分布律计算。随机变量服从二项分布，其分布律为：

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

上式给出了在 n 次试验中（例如 n 位传送）发生 k 次事件（例如误码）的概率，其中的 p 为单次试验中事件发生的概率（例如一个比特误码）。

当我们关心 n 次试验中，事件发生次数 ε 等于或小于 N 次的概率时，由分布律得：

$$P\{\varepsilon \leq N\} = \sum_{k=0}^N P_n(k) = \sum_{k=0}^N \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

上式小于给定的值 γ ，可确定 N 。从而问题得到解决。

结论：大数定律为用频率估计概率提供了理论依据，从而帮助我们解决实际问题。