

一、判断题（每小题 2 分，共 10 分）

(✓) 2. n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 等于它的任意一行的各元素与其对应代数余子式乘积的和.

(√) 5. 齐次线性方程组一定有零解.

二、填空题（每小题 4 分，共 16 分）

1. $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}} 0 \hspace{2cm}.$

2. 设 A, B 为三阶矩阵, 且 $|A| = 2$, $|B| = 3$, 求 $|-2(A^T B^{-1})^{-1}| = \underline{\quad -12 \quad}$.

$$3. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\quad}{\quad} \begin{pmatrix} 10 & 4 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \frac{\quad}{\quad}.$$

4. 向量组 $\alpha_1 = (2, 4, 2), \alpha_2 = (1, 1, 0), \alpha_3 = (2, 3, 1), \alpha_4 = (3, 5, 2)$ 的秩为 2.

三、选择题（每小题 3 分，共 24 分）

1. 若 $\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & \lambda_2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, 则 λ_1, λ_2 必须满足 (C)

D. λ_1, λ_2 均可任意数

2. 设 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -1$, 则 $a =$ (A)

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. -1 D. 1

3. 设 A, B 均为 n 阶矩阵, 下列关系一定成立的是 (D)

- A. $(AB)^2 = A^2 B^2$ B. $(AB)^T = A^T B^T$ C. $|A+B| = |A| + |B|$ D. $|AB| = |BA|$

4. 当 a 取何值时, 线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = a \end{cases}$ 有解 (A)

- A. 5 B. 0 C. 1 D. 2

5. 下列矩阵中与矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形不相同的是 (C)

- A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 5)$, $\alpha_2 = (2, -1, 1, 1)$, 向量 $\beta = (4, 3, -1, 11)^T$ 可表示为 α_1, α_2 的线性组合: $\beta = a\alpha_1 + b\alpha_2$, 则 a, b 应满足条件 (C)

- A. $a=2, b=2$ B. $a=1, b=2$ C. $a=2, b=1$ D. $a=1, b=1$

7. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 3, 1)$, $\alpha_2 = (-1, 1, -1, 3)$, $\alpha_3 = (5, -2, 8, -9)$, $\alpha_4 = (-1, 3, 1, 7)$, 下列是该向量组的极大线性无关组的是 (B)

- A. α_1 B. α_1, α_3 C. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ D. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$

8. 三阶矩阵 A 的特征值为 $-2, 1, 3$, 则下列矩阵中非奇异矩阵的是 (A)

- A. $2I - A$ B. $2I + A$ C. $I - A$ D. $A - 3I$

四、计算题（共 50 分）

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 的值. (7 分)

解：原式 = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix}$ (2 分)

= $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{vmatrix}$ (4 分)

= $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{vmatrix}$ (6 分)

= $1 \times (-1) \times (-4) \times 40 = 160$ (7 分)

2. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ 的秩. (8 分)

解： $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ (4 分)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6 \text{ 分})$$

阶梯矩阵中非零行的行数为 2，故 $r(A) = 2$ (8 分)

3. 判断矩阵是否可逆，若可逆，求其逆矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. (10 分)

解：因为 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ ，所以矩阵 A 可逆. (2 分)

作 3×6 矩阵 $(A: I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (3 分)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & : & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & : & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & : & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & : & 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (6 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & : & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & : & 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (7 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & : & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & : & \frac{7}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{于是得到 } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 5 & -1 & 1 \\ \frac{7}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (10 \text{ 分})$$

4. 用基础解系表示如下线性方程组的全部解

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases} \quad (15 \text{ 分})$$

$$\text{解: } (\mathbf{A} : \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -1 & \vdots & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & \vdots & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & \vdots & 7 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & \vdots & 4 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & \vdots & 4 \\ 0 & -14 & 4 & 8 & \vdots & 8 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \quad (4 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{13}{7} & \vdots & \frac{13}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & \vdots & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \quad (6 \text{ 分})$$

即原方程组与方程组

$$\begin{cases} x_1 = \frac{13}{7} - \frac{3}{7}x_3 - \frac{13}{7}x_4 \\ x_2 = -\frac{4}{7} + \frac{2}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4 \end{cases}$$

同解，其中 x_3, x_4 为自由未知量. (8 分)

让自由未知量 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ 取值 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，得方程组的一个解 $\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \frac{13}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (10 分)

原方程组的导出组与方程组

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{7}x_3 - \frac{13}{7}x_4 \\ x_2 = \frac{2}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4 \end{cases}$$

同解，其中 x_3, x_4 为自由未知量. (12 分)

对自由未知量 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ 取值 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ， $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，即得导出组的基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 13 \\ -\frac{13}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (14 \text{ 分})$$

因此所给方程组的全部解为

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\eta} + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{13}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{13}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } c_1, c_2 \text{ 为任意常数. } (15 \text{ 分})$$

5. 求矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量. (10 分)

解: 矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征方程为

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = 0 \quad (1 \text{ 分})$$

化简得 $(\lambda-2)(\lambda-1)^2 = 0$, 所以 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值. (3 分)

当 $\lambda_1 = 2$ 时, 解齐次线性方程组 $(2\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = 0$

$$2\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可得它的基础解系是 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 所以矩阵 $\mathbf{A}$ 对应于 $\lambda_1 = 2$ 的全部特征向量是

$$c_1 \boldsymbol{\alpha}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \text{ 为任意常数}) \quad (6 \text{ 分})$$

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 时, 解齐次线性方程组 $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = 0$

$$\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可得它的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, 所以矩阵 $\mathbf{A}$ 对应于二重特征值 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 的全

部特征向量为 $c_2 \boldsymbol{\alpha}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (c_2 为任意常数) (10 分)