

《线性代数》模拟试卷（五）答案

一、判断题（下列命题正确的打√，错误的打×，每小题2分，共10分）

1. 行列式为零，则必有两行元素成比例。 (×)
2. 两个非零矩阵的乘积仍是非零的。 (×)
3. 非齐次线性方程组必有解。 (×)
4. 包含零向量的向量组线性相关。 (√)
5. 零向量与任意向量正交。 (√)

二、选择题（从A、B、C、D中选出一个正确答案，每小题4分，共20分）

1. n 级行列式 D 的元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 与代数余子式 A_{ij} 的关系是 (D)
A. $M_{ij} = -A_{ij}$ B. $A_{ij} = M_{ij}$ C. $M_{ij} = (-1)^n A_{ij}$ D. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
2. n 阶矩阵 A 可逆的充分必要条件是 (C)
A. $|A|=1$ B. $|A|=0$ C. $|A| \neq 0$ D. $A^T = A$
3. 若齐次线性方程组 $\begin{cases} kx_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + kx_2 = 0 \end{cases}$ 只有零解，则 k 必须满足 (B)
A. $k=1$ 或 $k=-1$ B. $k \neq 1$ 且 $k \neq -1$ C. $k=1$ D. $k=-1$
4. 设 A 为 n 阶矩阵，且 $|A|=0$ ，则有 (A)
A. A 的列向量线性相关 B. A 的列向量线性无关
C. A 的行秩为 0 D. A 的秩为 n

5. 设 A 为 n 阶矩阵, 则有

(D)

A. A 的特征值为 1 B. A 的特征值不为 2

C. A 的特征向量为 0 D. A 的特征向量不为 0

三、填空题 (请用正确答案填空, 每小题 4 分, 共 20 分)

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ 中, 代数余子式 $A_{22} = -3$, 则 $x = \underline{4}$ 。

2. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$ 的秩为 1, 则 k_1, k_2 必满足 $\underline{k_2 = 2k_1}$ 。

3. 齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$ 的一个基础解系是 $\underline{(1,1)}$ 。

4. 向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (0, 2, 0), \alpha_3 = (0, 0, 3)$ 的秩为 $\underline{3}$ 。

5. 正交向量组 $\alpha_1 = (1, -1), \alpha_2 = (1, 1)$ 单位化为 $\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1), \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ 。

四、计算题 (每小题 10 分, 共 40 分)

1. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 。

解: $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) \times (-4) \times (40) = 160 \quad \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

2. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

$$\begin{aligned} \text{解: } (A, I) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (5 \text{ 分}) \end{aligned}$$

$$\text{所以 } A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 \\ -5 & -3 & 1 \\ 6 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

3. 求向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 3), \alpha_2 = (-1, 1, -1), \alpha_3 = (2, 0, 4), \alpha_4 = (-1, 3, 1)$ 的一个极大无关组, 并将其余向量用该极大无关组线性表示。

解: 对矩阵 $A = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T)$ 作行初等变换

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

所以 α_1, α_2 为一个极大无关组, 且

$$\alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_4 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \quad \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

4. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

解: A 的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$ (2 分)

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ 时, 方程组 $(\lambda_1 I - A)X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的基础解系为

$\alpha_1 = (0, 1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 0, 1)^T$, 所以 A 对应于特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ 的全部特征向量为

$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2, k_1, k_2$ 为不全为 0 的常数 (6 分)

当 $\lambda_3 = 1$ 时, 方程组 $(\lambda_3 I - A)X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的基础解系为

$\alpha_3 = (-1, 0, 1)^T$, 所以 A 对应于特征值 $\lambda_3 = 1$ 的全部特征向量为

$k_3 \alpha_3, k_3$ 为不为 0 的常数 (10 分)

五、证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

1. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 证明向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关。

证明: 设 $k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3) + k_3(\alpha_3 + \alpha_1) = 0$

则 $(k_1 + k_3)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + (k_2 + k_3)\alpha_3 = 0$ (3 分)

因为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关

所以 $k_1 + k_3 = k_1 + k_2 = k_2 + k_3 = 0$

所以只有零解 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$

所以向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关 (5 分)

2. 设 A 是正交矩阵, 证明 A 的行列式的值为 1 或 -1。

证明: 因为 A 是正交矩阵

所以 $A^T A = I$ (2 分)

在上式两边取行列式得

$$|A^T A| = |A^T| |A| = |A|^2 = |I| = 1$$

所以 A 的行列式的值为 1 或 -1 (5 分)