

《线性代数》模拟试卷（一）答案

一、判断题（每小题 2 分，共 10 分）

- (√) 1. 任意一个排列经过一个对换后奇偶性改变.
(×) 2. 将行列式转置, 行列式的值改变.
(×) 3. 对于任意的两个矩阵 A, B , AB 一定有意义.
(√) 4. 零向量是任何一组向量的线性组合.
(√) 5. 齐次线性方程组一定有解.

二、填空题（每小题 4 分，共 16 分）

1. $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix} = \underline{\quad 0 \quad}.$

2. 设 A 为三阶矩阵, 若已知 $|A|=1$, 求 $|2|A|^T| = \underline{\quad 8 \quad}.$

3. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \underline{\quad} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \underline{\quad}.$

4. 向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 2), \alpha_2 = (0, 1, 1), \alpha_3 = (3, -1, 4), \alpha_4 = (1, 1, 1)$ 的秩为 3.

三、选择题（每小题 3 分，共 24 分）

1. 行列式 $\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ 的充分必要条件是 (D)

- A. $k = -2$ B. $k = 3$ C. $k \neq -2$ 且 $k \neq 3$ D. $k = -2$ 或 $k = 3$

2. 下列选项中不属于五阶行列式 $|a_{ij}|$ ($i, j = 1, 2, \dots, 5$) 中的一项是 (C)

- A. $a_{11}a_{23}a_{32}a_{45}a_{54}$ B. $-a_{51}a_{12}a_{43}a_{34}a_{25}$ C. $-a_{13}a_{52}a_{34}a_{21}a_{45}$ D. $a_{55}a_{44}a_{33}a_{22}a_{11}$

3. 若行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$, 则行列式 $D = \begin{vmatrix} 4a_{11} & 2a_{11} - 3a_{12} & a_{13} \\ 4a_{21} & 2a_{21} - 3a_{22} & a_{23} \\ 4a_{31} & 2a_{31} - 3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (A)$

- A. -12 B. 12 C. -24 D. 24

4. 设 A, B 均为 n 阶矩阵, 下列关系一定成立的是 (D)

- A. $(AB)^2 = A^2 B^2$ B. $(AB)^T = A^T B^T$ C. $|A+B| = |A| + |B|$ D. $|AB| = |BA|$

5. 下列命题一定成立的是 (D)

- A. 若 $AB = AC$, 则 $B = C$ B. 若 $AB = 0$, 则 $A = 0$ 或 $B = 0$

- C. 若 $A \neq 0$, 则 $|A| \neq 0$ D. 若 $|A| \neq 0$, 则 $A \neq 0$

6. 下列矩阵中与矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 同秩的矩阵是 (D)

- A. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

7. 设矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $Ax = 0$ 仅有零解的充分必要条件是 (A)

- A. A 的列向量组线性无关 B. A 的列向量组线性相关

- C. A 的行向量组线性无关 D. A 的行向量组线性相关

8. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 3, 6, 2)^T, \alpha_2 = (2, 1, 2, -1)^T, \alpha_3 = (1, -1, a, -2)^T$ 线性相关, 则 a 应满足条件 (C)

- A. $a = 2$ B. $a \neq 2$ C. $a = -2$ D. $a \neq -2$

四、计算题 (共 50 分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ 的值. (6 分)

$$\text{解: 原式} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -7 & -11 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \end{vmatrix} \quad (2 \text{ 分}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -27 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \end{vmatrix} \quad (4 \text{ 分})$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 51 \end{vmatrix} = -153 \quad (6 \text{ 分})$$

2. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ a+1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, 问 a 为何值时, $r(A)=2$; a 为何值时, $r(A)=3$.

(6 分)

$$\text{解: } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ a+1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = a-1 \quad (2 \text{ 分})$$

当 $a=1$ 时 $|A|=0$, 且有 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, 所以 $r(A)=2$. (4 分)

当 $a \neq 1$ 时 $|A| \neq 0$, $r(A)=3$. (6 分)

3. 解下列矩阵方程, 求出未知矩阵 X , $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$. (8 分)

$$\text{解: } (A|I) \rightarrow \left(1 \quad \frac{1}{4} \middle| \frac{1}{4} \quad 0 \right) \quad (1 \text{ 分}) \rightarrow \left(1 \quad \frac{1}{4} \middle| \frac{1}{4} \quad 0 \right) \quad (2 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \left(1 \quad \frac{1}{4} \middle| \frac{1}{4} \quad 0 \right) \quad (3 \text{ 分}) \rightarrow \left(1 \quad 0 \middle| -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right) \quad (4 \text{ 分})$$

则 $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ (5 分), 所以 $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ (8 分)

4. 用基础解系表示如下线性方程组的全部解。

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases} \quad (15 \text{ 分})$$

解：作方程组的增广矩阵 $(A:b)$ ，并对它施以初等行变换：

$$(A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -1 & \vdots & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & \vdots & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & \vdots & 7 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & \vdots & 4 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & \vdots & 4 \\ 0 & -14 & 4 & 8 & \vdots & 8 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \quad (4 \text{ 分})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{13}{7} & \vdots & \frac{13}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & \vdots & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \quad (6 \text{ 分})$$

即原方程组与方程组

$$\begin{cases} x_1 = \frac{13}{7} - \frac{3}{7}x_3 - \frac{13}{7}x_4 \\ x_2 = -\frac{4}{7} + \frac{2}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4 \end{cases}$$

同解，其中 x_3, x_4 为自由未知量。 (8 分)

让自由未知量 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ 取值 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，得方程组的一个解 $\eta = \begin{pmatrix} \frac{13}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (10 分)

原方程组的导出组与方程组

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{7}x_3 - \frac{13}{7}x_4 \\ x_2 = \frac{2}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4 \end{cases}$$

同解，其中 x_3, x_4 为自由未知量。 (12 分)

对自由未知量 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ 取值 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ， $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，即得导出组的基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -\frac{13}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (14 \text{ 分})$$

因此所给方程组的全部解为

$$x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{13}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{13}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } c_1, c_2 \text{ 为任意常数. } (15 \text{ 分})$$

5. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量. (15 分)

解：矩阵 A 的特征方程为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (3 \text{ 分})$$

化简得 $(\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0$ ，所以 $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2$ 是矩阵 A 的两个不同的特征值. (6 分)

当 $\lambda_1 = 4$ 时，解齐次线性方程组 $(4I - A)x = 0$ ，由此得基础解系 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，(8

分) 所以 A 的对应于 $\lambda_1 = 4$ 的全部特征向量为 $c_1 \alpha_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (c_1 为任意非零常数)

(10 分)

当 $\lambda_2 = -2$ 时，齐次线性方程组 $(-2I - A)x = 0$ 的基础解系为 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ ，(12

分) 所以 A 的对应于

$\lambda_2 = -2$ 的全部特征向量为 $c_2 \alpha_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ (c_2 为任意非零常数) (15 分)