

第一节 随机试验

一、概率论的诞生及应用

二、随机现象

三、随机试验

四、小结

一、概率论的诞生及应用

1654年, 一个名叫梅累¹的骑士就 “两个赌徒约定赌若干局, 且谁先赢 c 局便算赢家, 若在一赌徒胜 a 局 ($a < c$), 另一赌徒胜 b 局 ($b < c$) 时便终止赌博, 问应如何分赌本” 为题求教于帕斯卡²与费马³通信讨论这一问题, 于1654 年共同建立了概率论的第一个基本概念——**数学期望**.



概率论是数学的一个分支， 它研究随机现象的数量规律， 概率论的应用几乎遍及所有的科学领域，例如天气预报、地震预报、产品的抽样调查，在通讯工程中概率论可用以提高信号的抗干扰性、分辨率等等。



二、随机现象

1. 确定性现象

在一定条件下必然发生的现象称为确定性现象.

你能举出一些确定性现象的实例吗?

举例

2. 随机现象

在一定条件下可能出现也可能不出现的现象称为随机现象.

你能举出一些随机现象的实例吗?

举例

说明

1. 随机现象揭示了条件和结果之间的非确定性联系, 其数量关系无法用函数加以描述.
2. 随机现象在一次观察中出现什么结果具有**偶然性**, 但在大量试验或观察中, 这种结果的出现具有一定的统计**规律性**, 概率论就是研究随机现象这种本质规律的一门数学学科.





如何来研究随机现象？

随机现象是通过**随机试验**来研究的.



三、随机试验

定义 在概率论中, 把具有以下**三个特征**的试验称为**随机试验**.

1. 可以在相同的条件下重复地进行;
2. 每次试验的可能结果不止一个, 并且能事先明确试验的所有可能结果;
3. 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.



说明

1. **随机试验简称为试验,** 是一个广泛的术语.

它包括各种各样的科学实验, 也包括对客观事物进行的 “调查”、 “观察” 或 “测量” 等.

2. 随机试验通常用 来表示.



实例



“抛掷一枚硬币,观察字面,花面出现的情况”。

分析: (1) 试验可以在**相同的条件下重复地进行**;

(2) 试验的所有可能结果: **字面、花面**;

(3) 进行一次**试验之前不能确定哪一个结果会出现**。

故为随机试验。

其他实例



四、小结

1. 概率论是研究随机现象规律性的一门数学学科.

随机现象的特征: 条件不能完全决定结果.

2. 随机现象是通过随机试验来研究的.

随机
试
验

- (1) 可以在相同的条件下重复地进行;
- (2) 每次试验的可能结果不止一个, 并且能事先明确试验的所有可能结果;
- (3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.



第二节 样本空间、随机事件

一、样本空间 样本点

二、随机事件的概念

三、随机事件间的关系及运算

四、小结

一、样本空间 样本点

定义 随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间, 记为 S . 样本空间的元素, 即试验 E 的每一个结果, 称为样本点.

举例

说明

1. 试验不同, 对应的样本空间也不同.
2. 同一试验, 若试验目的不同, 则对应的样本空间也不同.

思考：

对于同一试验：“将一枚硬币抛掷三次”：

观察正面、反面出现的情况，样本空间是什么？

观察出现正面的次数，则样本空间是什么？



3.建立样本空间, 事实上就是建立随机现象的数学模型. 因此, 一个样本空间可以概括许多内容大不相同的实际问题.

例如, 只包含两个样本点的样本空间

$$S = \{H, T\},$$

它既可以作为抛掷硬币出现正面或出现反面的模型, 也可以作为产品检验中合格与不合格的模型, 又能用于排队现象中有人排队与无人排队的模型.



课堂练习

写出下列随机试验的样本空间.

1. 同时掷三颗骰子,记录三颗骰子之和.
2. 生产产品直到得到10件正品,记录生产产品的总件数.





所以在具体问题的研究中，描述随机现象的第一步就是建立样本空间.



二、随机事件的概念

1. 基本概念

随机试验 E 的样本空间 S 的子集称为 E 的**随机事件**, 简称**事件**.

每次实验中, 当且仅当这一子集中的一个样本点出现时, 称这一**事件发生**.

由一个样本点组成的单点集, 称为**基本事件**.



样本空间 S 包含所有的样本点,它是 S 自身的子集,在每次实验中它总是发生的, S 称为必然事件.

空集 $\emptyset$ 不包含任何点,它也作为样本空间的子集,它在每次实验中都不发生, $\emptyset$ 称为不可能事件.

举例

必然事件的对立面是不可能事件, 不可能事件的对立面是必然事件, 它们互称为对立事件.



2. 几点说明

- (1) 随机事件可简称为事件, 并以大写英文字母 $A, B, C, \dots$ 来表示事件.

例如 抛掷一枚骰子, 观察出现的点数.

可设 $A = \text{“点数不大于4”}$,

$B = \text{“点数为奇数”}$ 等等.

- (2) 随机试验、样本空间与随机事件的关系

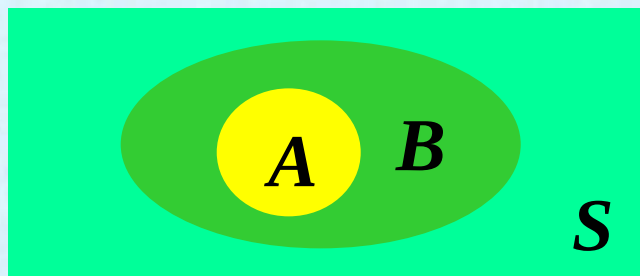
每一个随机试验相应地有一个样本空间,
样本空间的子集就是随机事件.



三、随机事件间的关系及运算

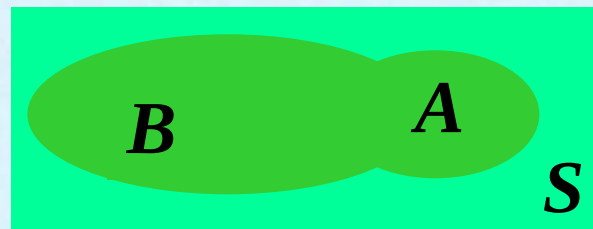
设实验 E 的样本空间为 S ，而 $A, B, A_k (k = 1, \dots)$ 是 S 的子集。

1. 若 $A \subset B$ ，则称事件 B 包含事件 A ，这指的是事件 A 发生必然导致事件 B 发生。



实例 “长度不合格” 必然导致 “产品不合格” 所以 “产品不合格”包含 “长度不合格” .
若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ ，则称事件 A 与事件 B 相等。

2. 事件 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$, 称为事件 A 与事件 B 的和事件. 当且仅当 A, B 中至少有一个发生时, 事件 $A \cup B$ 发生.



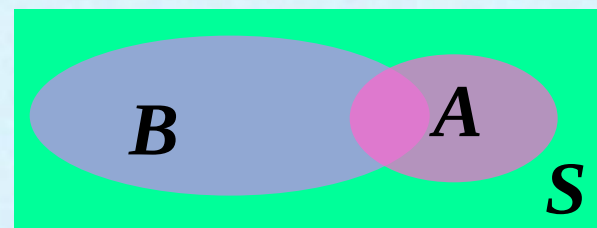
某种产品的合格与否是由该产品的长度与直径是否合格所决定, 因此 “产品不合格” 是 “长不合格” 与 “直径不合格” 的并.

推广 称 $\bigcup_{k=1}^n A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的和事件, 称 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \dots$ 的和事件.



3. 事件 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$, 称为事件 A 与事件 B 的积事件. 当且仅当 A, B 同时发生时事件 $A \cap B$ 发生. $A \cap B$ 也记作 AB .

A 和 B 重叠部分



某种产品的合格与否是由该产品的长度与直径是否合格所决定, 因此 “**产品合格**” 是 “**长度合格**” 与 “**直径合格**” 的交或积事件.

类似地, 称 $\bigcap_{k=1}^n A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的积事件, 称 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \dots$ 的积事件.



和事件与积事件的运算性质

$$A \cup A = A, \quad A \cup S = S, \quad A \cup \emptyset = A,$$

$$A \cap A = A, \quad A \cap S = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset.$$

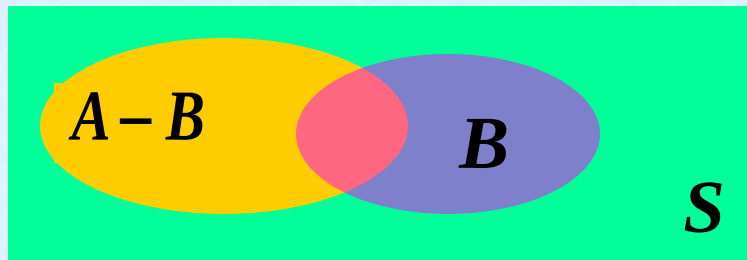
4. 事件 $A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$, 称为事件 A 与事件 B 的差事件. 当且仅当 A 发生, B 不发生时, 事件 $A - B$ 发生.

“长度合格但直径不合格” 是 “长度合格” 与 “直径合格” 的差.

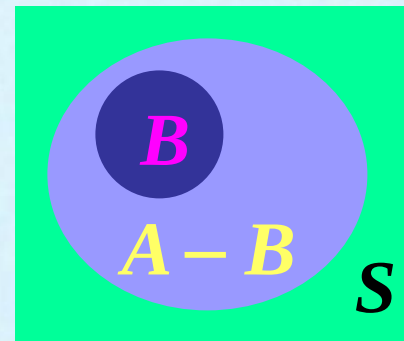


图示 A 与 B 的差:

$$B \not\subset A$$



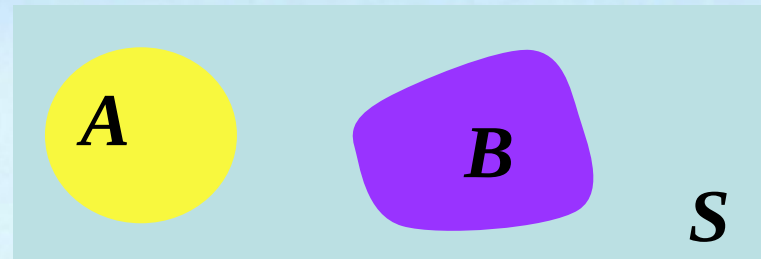
$$B \subset A$$



5. 若 $A \cap B = \emptyset$, 则称事件 A 与 B 是互不相容或互斥的. 这指的是事件 A 与事件 B 不能同时发生, 基本事件是两两互不相容的.



图示 A 与 B 互斥.



抛掷一枚骰子:



“骰子出现1点” $\xleftrightarrow{\text{互斥}}$ “骰子出现2点”

抛掷一枚硬币:



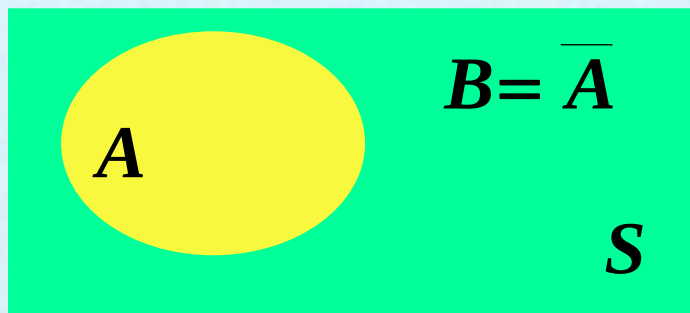
“出现花面” 与 “出现字面” 是互不相容的两个事件.



6. 若 $A \cup B = S$ 且 $A \cap B = \emptyset$, 则称事件 A 与事件 B 互为逆事件. 又称事件 A 与事件 B 互为对立事件. A 的对立事件记为 $\bar{A}$, $\bar{A} = S - A$.

“骰子出现1点” $\xleftrightarrow{\text{对立}}$ “骰子不出现1点”

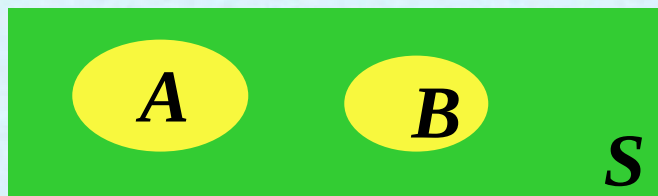
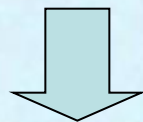
图示 A 与 B 的对立.



若 A 与 B 互逆, 则有 $A \cup B = S$ 且 $AB = \emptyset$.

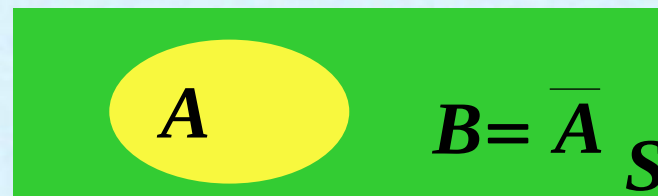
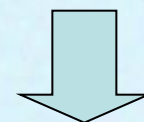
对立事件与互斥事件的区别

A、B 互斥



$$AB = \emptyset$$

A、B 对立



$$A \cup B = S \text{ 且 } AB = \emptyset$$

互斥



对立



事件间的运算规律 设 A, B, C 为事件, 则有

(1) 交换律 $A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A.$

(2) 结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C;$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

(3) 分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

(4) 德·摩根律 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}; \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$



例1 设 $A_1 = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$,

$$A_2 = \{HHH, TTT\},$$

求 $A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2$, $A_2 - A_1$.

解 $A_1 \cup A_2 = \{HHH, HHT, HTH, HTT, TTT\};$

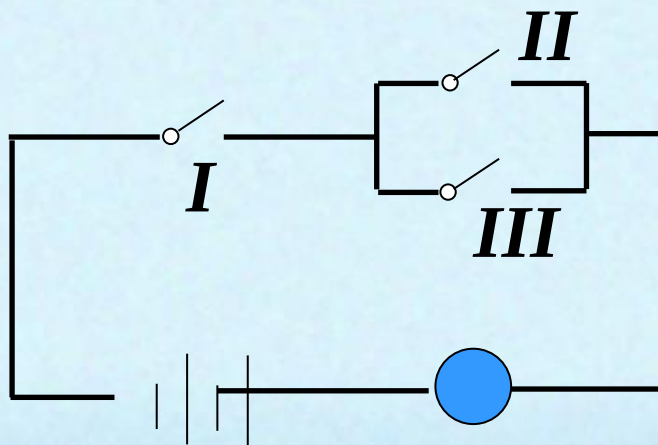
$$A_1 \cap A_2 = \{HHH\};$$

$$A_2 - A_1 = \{TTT\};$$



例2 如图所示的电路，以 A 表示事件“信号灯亮”，以 B, C, D 分别表示事件将电器接点I, II, III闭合，则 $BC \subset A, BD \subset A, BC \cup BD = A$ ，而 $\overline{B}A = \emptyset$ ，即事件 $\overline{B}$ 与事件 A 互不相容。

又可得 $\overline{B \cup C} = \overline{B} \cap \overline{C}$.



课堂练习

1. 设 A, B, C 表示三个随机事件, 试将下列事件用 A, B, C 表示出来.

- (1) A 出现, B, C 不出现;
- (2) A, B 都出现, C 不出现;
- (3) 三个事件都出现;
- (4) 三个事件至少有一个出现;
- (5) 三个事件都不出现;



- (6) 不多于一个事件出现;
- (7) 不多于两个事件出现;
- (8) 三个事件至少有两个出现;
- (9) A, B 至少有一个出现, C 不出现;
- (10) A, B, C 中恰好有两个出现.



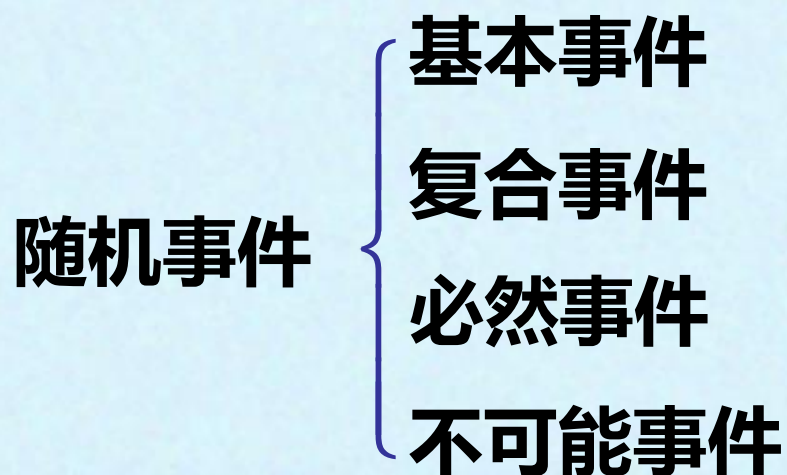
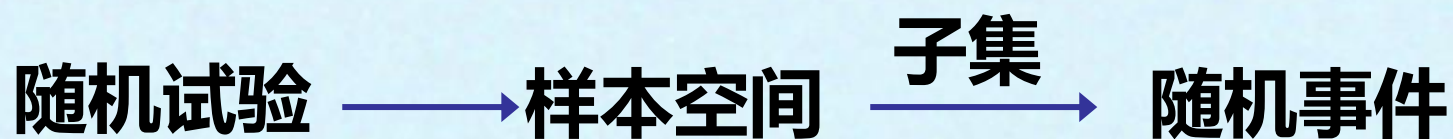
2. 设一个工人生产了四个零件, A_i 表示他生产的第 i 个零件是正品 ($i = 1, 2, 3, 4$), 试用 A_i 表示下列各事件:

- (1) 没有一个次品; (2) 至少有一个次品;
- (3) 只有一个次品; (4) 至少有三个不是次品;
- (5) 恰好有三个次品; (6) 至多有一个次品.



四、小结

随机试验、样本空间与随机事件的关系



概率论与集合论之间的对应关系

记号	概率论	集合论
S	样本空间，必然事件	空间
$\emptyset$	不可能事件	空集
e	基本事件	元素
A	随机事件	子集
$\overline{A}$	A 的对立事件	A 的补集
$A \subset B$	A 出现必然导致 B 出现	A 是 B 的子集
$A = B$	事件 A 与事件 B 相等	集合 A 与集合 B 相等



$A \cup B$	事件A与事件B的和	集合A与集合B的并集
AB	事件A与事件B的积	集合A与集合B的交集
$A - B$	事件A与事件B的差	A与B两集合的差集
$AB = \emptyset$	事件A与B互不相容	A与B 两集合中没有相同的元素



第三节 频率与概率

- 一、频率的定义与性质
- 二、概率的定义与性质
- 三、小结

一、频率的定义与性质

1. 频率的定义

定义 在相同条件下, 进行了 n 次试验, 在这 n 次试验中, 事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数. 比值 n_A / n 称为事件 A 发生的频率, 记作 $f_n(A)$.



2. 频率的性质

设 A 是随机试验 E 的任一事件,则

$$1^\circ 0 \leq f_n(A) \leq 1;$$

$$2^\circ f_n(S) = 1;$$

3 $^\circ$ 若 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 是两两互不相容的事件, 则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \dots + f_n(A_k).$$

事件发生的频率大小表示其发生的频繁程度.
频率大, 事件发生就越频繁, 这表示事件在一次试验中发生的可能性就越大. 反之亦然.



例1 考虑“抛硬币”这个试验将一枚硬币抛掷5次、50次、500次，各做10遍，得到数据如下：

试验序号	$n = 5$		$n = 50$		$n = 500$	
	n_H	f	n_H	f	n_H	f
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	24	0.48	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	250	0.512
4	5	1.0	25	0.50	247	0.494
5	1	0.2	28	0.56	251	0.502
6	2	0.4	18	0.36	250	0.500
7	4	0.8	27	0.54	258	0.516

随 n 的增大, 频率 f 呈现出稳定性

在 $\frac{1}{2}$ 处波动较小

波动最小

从上述数据可得:

- (1) 频率有**随机波动性**, 即对于同样的 n , 所得的 f 不一定相同;
- (2) 抛硬币次数 n 较小时, 频率 $f_n(H)$ 在0与1之间随机波动, 其幅度较大, 但随着 n 增大, 频率 $f_n(H)$ 呈现出**稳定性**. 即当 n 逐渐增大时 $f_n(H)$ 总是在0.5附近摆动, 而逐渐稳定于0.5 .



这种试验历史上有人做过，得到下图数据：

实验者	n	n_H	f
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
K·皮尔逊	12000	6019	0.5016
K·皮尔逊	24000	12012	0.5005

$$f(H) \xrightarrow{n \text{ 的增大}} \frac{1}{2}.$$



例2 考察英语中特定字母出现的频率, 当观察字母的个数 n (试验次数)较小时, 频率有较大幅度的随机波动. 但当 n 增大时, 频率呈现出稳定性.

字母	频率	字母	频率	字母	频率
<i>E</i>	0.1268	<i>L</i>	0.0394	<i>P</i>	0.0186
<i>T</i>	0.0978	<i>D</i>	0.398	<i>B</i>	0.0156
<i>A</i>	0.0788	<i>U</i>	0.0280	<i>V</i>	0.0102
<i>O</i>	0.0776	<i>C</i>	0.0268	<i>K</i>	0.0060
<i>I</i>	0.0707	<i>F</i>	0.0256	<i>X</i>	0.0016
<i>N</i>	0.0706	<i>M</i>	0.0244	<i>J</i>	0.0010
<i>S</i>	0.0634	<i>W</i>	0.0214	<i>Q</i>	0.0009
<i>R</i>	0.0594	<i>Y</i>	0.0202	<i>Z</i>	0.0006
<i>H</i>	0.0573	<i>G</i>	0.0187		



验证频率稳定性的著名实验

高尔顿 (Galton) 板试验



思考：

医生在检查完病人的时候摇摇头：“你的病很重，在十个得这种病的人中只有一个能救活。”当病人被这个消息吓得够呛时，医生继续说：“但你是幸运的，因为你找到了我，我已经看过九个病人了，他们都死于此病。”

医生的说法对吗？



大量试验证实, 当重复试验的次数 n 逐渐增大时, 频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性, 逐渐稳定于某个常数. 这种 **“频率稳定性”** 即通常所说的统计规律性. 让试验重复大量次数, 计算频率 $f_n(A)$, 以它来表征事件 A 发生可能性大小是合适的.

然而在实际中, 不可能对每一事件都做大量的试验, 而且为了理论研究需要, 我们从频率的稳定性和频率的性质得到启发, 给出如下表征事件发生大小的概率的定义.

二、概率的定义与性质

1933年，苏联数学家**柯尔莫哥洛夫**提出了概率论的公理化结构，给出了概率的严格定义，使概率论有了迅速的发展。

柯尔莫哥洛夫资料



1. 概率的定义

定义 设 E 是随机试验, S 是它的样本空间 **对于** E 的每一事件 A 赋予一个实数, 记为 $P(A)$, **称为事件** A 的概率. 如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足条件:

- 1° 非负性: 对于每一个事件 A , 有 $P(A) \geq 0$;
- 2° 规范性: 对于必然事件 S , 有 $P(S) = 1$;
- 3° 可列可加性: 设 $A_1, A_2, \dots$ 是两两互不相容的事件, 即对于 $A_i A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots$, 有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

2. 概率的性质

性质i $P(\emptyset) = 0$.

证 令 $A_n = \emptyset (n = 1, 2, \dots)$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$,

$A_i A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots$. 由概率可列可加性,

$$P(\emptyset) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset).$$

由概率的非负性知, $P(\emptyset) \geq 0$, 因此 $P(\emptyset) = 0$.



性质ii(有限可加性)

若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是两两互不相容事件, 则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

证 令 $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$, 即有 $A_i A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots$. 由概率的可列可加性得:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \\ &= \sum_{k=1}^n P(A_k) + 0 = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) \end{aligned}$$

证毕.

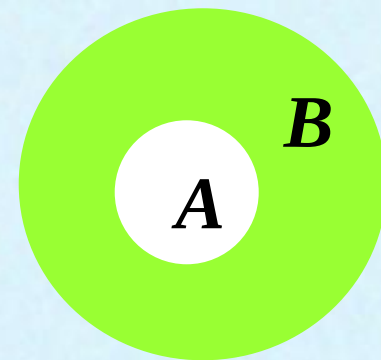


性质iii

设 A, B 是两个事件, 若 $A \subset B$, 则有

$$P(B - A) = P(B) - P(A);$$

$$P(B) \geq P(A).$$



证 由 $A \subset B$ 知 $B = A \cup (B - A)$,

且 $A(B - A) = \emptyset$, 再由概率的有限可加性, 得

$$P(B) = P(A) + P(B - A) \quad \text{证毕.}$$

又由概率的非负性, $P(B - A) \geq 0$ 知 $P(B) \geq P(A)$.

性质iv

对于任一事件 A , $P(A) \leq 1$.

证 因 $A \subset S$, 由性质iii得

$$P(A) \leq P(S) = 1.$$

性质v(逆事件的概率) 对于任一事件 A , 有

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

证 因 $A \cup \bar{A} = S$, 且 $A\bar{A} = \emptyset$, 由性质ii得

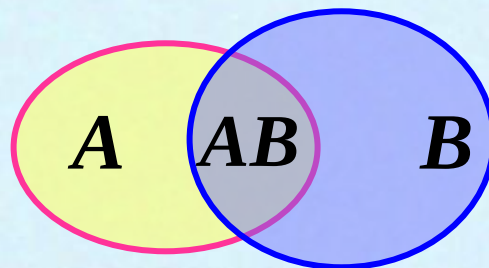
$$1 = P(S) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$



性质vi(加法公式)

对于任意两事件 A, B 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$



证 因 $A \cup B = A \cup (B - AB)$,

且 $A(B - AB) = \emptyset$, $AB \subset B$,

故

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B - AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(AB). \end{aligned}$$

证毕.

此性质可以推广到多个事件的情况.

设 A_1, A_2, A_3 为任意三个事件, 则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3)$$

对于任 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 有

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = & \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) \\ & + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \dots A_n). \end{aligned}$$

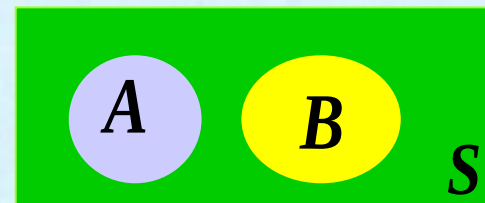


例3 设事件 A, B 的概率分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$, 求在下列三种情况下 $P(B\bar{A})$ 的值.

(1) A 与 B 互斥; (2) $A \subset B$; (3) $P(AB) = \frac{1}{8}$.

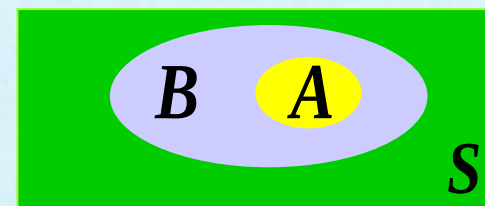
解 (1) 由图示得 $P(B\bar{A}) = P(B)$,

$$\text{故 } P(B\bar{A}) = P(B) = \frac{1}{2}.$$



(2) 由图示得

$$\begin{aligned} P(B\bar{A}) &= P(B) - P(A) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$



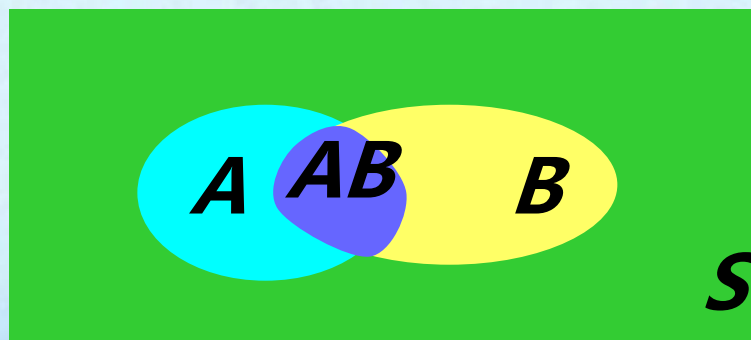
(3) 由图示得 $A \cup B = A \cup B\bar{A}$, 且 $A \cap B\bar{A} = \emptyset$,

$$\text{又 } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

$$P(A \cup B\bar{A}) = P(A) + P(B\bar{A}),$$

$$P(A \cup B) = P(A \cup B\bar{A}),$$

$$\text{因而 } P(B\bar{A}) = P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$



三、小结

1. 频率

$$1^{\circ} \quad 0 \leq f_n(A) \leq 1;$$

$$2^{\circ} \quad f_n(S) = 1;$$

3[°] 若 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 是两两互不相容的事件, 则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \dots + f_n(A_k).$$



2. 概率

1° 非负性：对于每一个事件,有 $P(A) \geq 0$;

2° 规范性：对于必然事件 S ,有 $P(S) = 1$;

3° 可列可加性：设 $A_1, A_2, \dots$ 是两两互不相容的事件, 即对于 $A_i A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots$, 有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots.$$



第四节 等可能概型(古典概型)

- 一、古典概型定义
- 二、古典概型计算公式
- 三、典型例题
- 四、小结

一、古典概型的定义

定义 设 E 是随机试验, 若 E 满足下列条件:

- 1° 试验的样本空间只包含有限个元素;**
- 2° 试验中每个基本事件发生的可能性相同.**

则称 E 为等可能概型

等可能概型的试验大量存在, 它在概率论发展初期是主要研究对象. 等可能概型的一些概念具有直观、容易理解的特点, 应用非常广泛.



二、古典概型的计算公式

定理 设试验的样本空间 S 包含 n 个元素, 事件 A 包含 k 个基本事件, 则有

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A \text{ 包含的基本事件}}{S \text{ 中基本事件的总数}},$$

该式称为**等可能概型中事件概率的计算公式**.



证 设试验的样本空间为 $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$,
由于在试验中每个基本事件发生的可能性相同, 即

$$P(\{e_1\}) = P(\{e_2\}) = \dots = P(\{e_n\}).$$

又由于基本事件是两两互不相容的, 于是

$$\begin{aligned} 1 &= P(S) = P(\{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \dots \cup \{e_n\}) \\ &= P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \dots + P(\{e_n\}) \\ &= nP(\{e_i\}), \end{aligned}$$

于是
$$P(\{e_i\}) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$



若事件A包含 k 个基本事件, 即

$$A = \{e_{i_1}\} \cup \{e_{i_2}\} \cup \cdots \cup \{e_{i_k}\},$$

这里 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 中某 k 个不同的数, 则有

$$P(A) = \sum_{j=1}^k P(\{e_{i_j}\}) = \frac{k}{n} = \frac{A \text{ 包含的基本事件数}}{S \text{ 中基本事件的总数}}$$

定理得证.



三、典型例题

例1 将一枚硬币抛掷三次.

- (1) 设事件 A_1 为“恰有一次出现正面” 求 $P(A_1)$;
- (2) 设事件 A_2 为“至少有一次出现正面”,求 $P(A_2)$.

解 (1) 我们考虑如下的样本空间:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\},$$

而

$$A_1 = \{HTT, THT, TTH\}.$$



S 中包含有限个元素, 由对称性知每个基本事件发生的可能性相同. 故由计算公式得

$$P(A_1) = \frac{3}{8}.$$

(2) 由于

$$\bar{A}_2 = \{TTT\},$$

于是

$$P(A_2) = 1 - P(\bar{A}_2) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$



注意

当样本空间中的元素较多时, 一般不再将元素一一列出, 只需分别求出 S 和 A 中元素的个数, 再用计算公式即可求得相应的概率.



例2 一只口袋装有6只球, 其中4只白球、2只红球. 从袋中取球两次, 每次随机地取一只, 考虑两种取球方式: (a) 第一次取一只球, 观察其颜色后放回袋中, 搅匀后再取一球. 这种取球方式叫做放回抽样. (b) 第一次取一球不放回袋中, 第二次从剩余的球中再取一球, 这种取球方式叫做不放回抽样. 试分别就上面两种情况求

- (1) 取到的两只球都是白球的概率;
- (2) 取到的两只球颜色相同的概率;



(3) 取到的两只球中至少有一只是白球的概率.

解 (a) 放回抽样的情况. 以 A, B, C 分别表示事件“取到的两只球都是白球”, “取到的两只球都是红球”, “取到的两只球中至少有一只是白球”. 易知“取到两只颜色相同的球”这一事件为 $A \cup B$, 而 $C = \bar{A \cup B}$.

在袋中依次取两只球, 每一种取法为一个基本事件, 显然此时样本空间中仅包含有限个元素, 且由对称性知每个基本事件发生的可能性相同, 因而



可利用公式来计算事件的概率.

第一次从袋中取球有6只球可供抽取, 第二次也有6只球可供抽取. 由组合法的乘法原理, 一共有 6×6 种取法. 即样本空间中元素总数为 6×6 . 对于事件A而言, 由于第一次共有4只白球可供抽取, 第二次也有4只白球可供抽取, 则由乘法原理总共有 4×4 种取法, 即A中包含 4×4 个元素. 同理, B中包含 2×2 个元素. 于是



$$P(A) = \frac{4 \times 4}{6 \times 6} = \frac{4}{9}.$$

$$P(B) = \frac{2 \times 2}{6 \times 6} = \frac{1}{9}.$$

由于 $AB = \emptyset$, 得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{9}.$$

$$P(C) = P(\bar{B}) = 1 - P(B) = \frac{8}{9}.$$

(b) 不放回抽样. 请同学们自己完成.



例3 将 n 只球随机地放入 $N(N \geq n)$ 个盒子里去, **试求每个盒子至多有一只球的概率(盒子容量不限).**

解 将 n 只球放入 N 个盒子中去, 因每一只球都可以放入 N 个盒子中的任一盒子, 故共有 $N \times N \times \cdots \times N = N^n$ 种不同的放法, 而每个盒子中至多放一只球共有 $N(N-1) \cdots [N-(n-1)]$ 种不同放法. 因而所求的概率为

$$p = \frac{N(N-1) \cdots (N-n+1)}{N^n} = \frac{A_N^n}{N^n}$$

说明: 许多问题和本例有相同数学模型.

生日问题



例4 设有 N 件产品, 其中有 D 件次品, 今从中任取 n 件, 问其中恰有 $k(k \leq D)$ 件次品的概率是多少?

解 在 N 件产品中抽取 n 件, 所有可能的取法共有

$$\binom{N}{n} \text{种},$$

在 D 件次品中取 k 件, 所有可能取法有 $\binom{D}{k}$ 种,

在 $N - D$ 件正品中取 $n - k$ 件所有可能的取法有

$$\binom{N - D}{n - k} \text{种},$$

由乘法原理知

在 N 件产品中取 n 件, 其中恰有 k 件次品的取法共有

$$\binom{D}{k} \binom{N-D}{n-k} \text{种},$$

所求概率为

$$p = \binom{D}{k} \binom{N-D}{n-k} / \binom{N}{n}.$$

超几何分布的概率公式



例5 袋中有 a 只白球, b 只红球, k 个人依次在袋中取一只球, (1) 作放回抽样; (2) 作不放回抽样, 求第 i ($i = 1, 2, \dots, k$) 人取到白球(记为事件 B)的概率 ($k \leq a + b$).

解 (1) 放回抽样的情况, 显然有

$$P(B) = \frac{a}{a+b}.$$

(2) 不放回抽样的情况.

各人取一只球, 共有 A_{a+b}^k 个基本事件:

$$A_{a+b}^k = (a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-k+1),$$



当事件 B 发生时, 第 i 人取的应是白球有 a 种取法. 其余被取的 $k-1$ 只球可以是其余 $a+b-1$ 只球中的任意 $k-1$ 只, 共有 A_{a+b-1}^{k-1} 种取法:

$$A_{a+b-1}^{k-1} = (a+b-1)(a+b-2)\cdots[a+b-1-(k-1)+1].$$

于是 B 中包含 $a \cdot A_{a+b-1}^{k-1}$ 个基本事件, 由计算公式得

$$P(B) = \frac{a \cdot A_{a+b-1}^{k-1}}{A_{a+b}^k} = \frac{a}{a+b}.$$

与上问结果
相同

结果分析: $P(B)$ 与 i 无关, 即 k 个人取球, 尽管取球的先后次序不同, 各人取到白球的概率是一样的.

(例如在**购买福利彩票时, 各人得奖的机会相同**).



例6 在1~2000的整数中随机地取一个数, 问取到的整数既不能被6整除, 又不能被8整除的概率是多少?

解 设A为事件“取到的数能被6整除”, B为事件“取到的数能被8整除” 则所求概率为

$$\begin{aligned} P(\overline{A}\overline{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)]. \end{aligned}$$

由于 $333 < \frac{2000}{6} < 334,$

故得 $P(A) = \frac{333}{2000}.$



由于 $\frac{2000}{8} = 250,$

故得 $P(B) = \frac{250}{2000}.$

又由于一个数同时能被6与8整除, 就相当于能被24整除, 因此, 由 $83 < \frac{2000}{24} < 84$, 得 $P(AB) = \frac{83}{2000},$

于是所求概率为

$$p = 1 - \left(\frac{333}{2000} + \frac{250}{2000} - \frac{83}{2000} \right) = \frac{3}{4}.$$



例7 将15名新生随机地平均分配到三个班级中去, 这15名新生中有3名是优秀生. 问 (1) 每个班级各分配到一名优秀生的概率是多少? (2) 3名优秀生分配在同一班级的概率是多少?

解 15名新生平均分配到三个班级中的分法总数为

$$\binom{15}{5} \binom{10}{5} \binom{5}{5} = \frac{15!}{5!5!5!}.$$

每一种分配法为一基本事件, 且由对称性易知每个基本事件发生的可能性相同.



(1) 将3名优秀生分配到三个班级使每个班级都有一名优秀生的分法共 $3!$ 种. 对于这每一种分法, 其余12名新生平均分配到三个班级中的分法共有 $\frac{12!}{4!4!4!}$ 种. 因此, 每一班级各分配到一名优秀生的

分法共有 $\frac{3! \times 12!}{4!4!4!}$ 种. 于是所求概率为

$$p_1 = \frac{3! \times 12!}{4!4!4!} \bigg/ \frac{15!}{5!5!5!} = \frac{25}{91}.$$

(2) 将3名优秀生分配在同一班级的分法共有3种. 对于这每一种分法, 其余12名新生的分法共有 $\frac{12!}{2!5!5!}$ 种. 因此3名优秀生分配在同一班级的分法有

$\frac{3 \times 12!}{2!5!5!}$ 种, 所求概率为

$$p_2 = \frac{3 \times 12!}{2!5!5!} / \frac{15!}{5!5!5!} = \frac{6}{91}.$$



例8 某接待站在某一周曾接待过12次来访, 已知所有这12次接待都是在周二和周四进行的, 问是否可以推断接待时间是有规定的?

解 假设接待站的接待时间是没有规定, 而各来访者在一周的任一天中去接待站是等可能的.

12次接待来访者都在周二、周四的概率为

$$\frac{2^{12}}{7^{12}} = 0.0000003.$$



人们在长期实践中总结得到“**概率很小的事在一次试验中实际上几乎是不发生的**”,现在概率很小的事件在一次试验中竟然发生了,因此有理由怀疑假设的正确性,从而推断接待站不是每天都接待来访者,即认为其接待时间是有规定的.



四、小结

定义 设 E 是随机试验, 若 E 满足下列条件:

- 1° 试验的样本空间只包含有限个元素;
- 2° 试验中每个基本事件发生的可能性相同.

则称 E 为等可能概型.

计算公式

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A \text{ 包含的基本事件}}{S \text{ 中基本事件的总数}}.$$



第五节 条件概率

一、条件概率

二、乘法定理

三、全概率公式与贝叶斯公式

四、小结

一、条件概率

例1 将一枚硬币抛掷两次，观察其出现正反面的情况.

分析 设事件 A 为“至少有一次为 H ”，

设事件 B 为“两次掷出同一面”.

现求已知事件 A 发生的条件下 B 发生的概率.



设 H 为正面, T 为反面.

$$S = \{ HH, HT, TH, TT \}.$$

$$A = \{ HH, HT, TH \}, \quad B = \{ HH, TT \},$$

$$P(A) = \frac{3}{4}, \quad P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(AB) = \frac{1}{4},$$

将事件 A 已经发生的条件下事件 B 发生的概率
记为 $P(B|A)$,

$$P(B|A) = \frac{1}{3} = \frac{P(AB)}{P(A)} \neq P(B).$$

1. 定义

设 A, B 是两个事件, 且 $P(A) > 0$, 称

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生条件下事件 B 发生的条件概率.

同理可得

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率.

2. 性质

1° 非负性: 对于每一事件 B , 有 $P(B|A) \geq 0$;

2° 规范性: 对于必然事件 S , 有 $P(S|A) = 1$;

3° 可列可加性: 设 $B_1, B_2, \dots$ 是两两互不相容事件, 则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i | A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i | A).$$



例2 一个盒子装有4只产品, 其中有3只一等品, 1只二等品. 从中取产品两次, 每次任取一只, 作不放回抽样. 设事件 A 为“第一次取到的是一等品”, 事件 B 为“第二次取到的是一等品”, 试求条件概率 $P(B|A)$.

解 此为古典概型问题. 先将产品编号, 1,2,3号为一等品; 4号为二等品. 以 (i, j) 表示第一次, 第二次分别取到第 i 号, 第 j 号产品.



试验 E 的样本空间为:

$$S=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),\cdots,(4,1),(4,2),\\(4,3)\},$$

$$A=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4)\},$$

$$AB=\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}.$$

由定义, 得条件概率

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{6/12}{9/12} = \frac{2}{3}.$$



也可按照条件概率的直接含义求 $P(B|A)$.

当事件 A 发生以后,试验 E 所有可能的结果的集合就是 A . A 中有9个元素,其中只有 $(1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2)$ 属于 B , 故可得

$$P(B|A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$



二、乘法定理

乘法定理 设 $P(A) > 0$, 则有 $P(AB) = P(B|A)P(A)$.

推广 设 A, B, C 为事件, 且 $P(AB) > 0$, 则有

$$P(ABC) = P(C|AB)P(B|A)P(A).$$

一般, 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 n 个事件, $n \geq 2$, 且 $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$, 则有

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) P(A_{n-1} | A_1 A_2 \cdots A_{n-2}) \cdots P(A_2 | A_1) P(A_1).$$


例3 设袋中装有 r 只红球, t 只白球.每次自袋中任取一只球,观察其颜色然后放回,并再放入 a 只与所取出的那只球同色的球.若在袋中连续取球四次,试求第一、二次取到红球且第三、四次取到白球的概率.

解 以 $A_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 表示事件“第 i 次取到红球, 则 $\bar{A}_3, \bar{A}_4$ 分别表示第三, 四次取到白球.



所求概率为

$$\begin{aligned} P(A_1 A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4) &= P(\bar{A}_4 | A_1 A_2 \bar{A}_3) P(\bar{A}_3 | A_1 A_2) P(A_2 | A_1) P(A_1) \\ &= \frac{t+a}{r+t+3a} \cdot \frac{t}{r+t+2a} \cdot \frac{r+a}{r+t+a} \cdot \frac{r}{r+t} \end{aligned}$$

此模型被波利亚用来作为描述传染病的数学模型.



例4 设某光学仪器厂制造的透镜, 第一次落下时打破的概率为 $1/2$, 若第一次落下未打破, 第二次落下打破的概率为 $7/10$, 若前两次落下未打破, 第三次落下打破的概率为 $9/10$. 试求透镜落下三次而未打破的概率.

解 以 $A_i (i = 1, 2, 3)$ 表示事件“透镜第 i 次落下打破”.
以 B 表示事件“透镜落下三次而未打破”.

因为 $B = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$, 故有

$$P(B) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = P(\bar{A}_3 | \bar{A}_1 \bar{A}_2) P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1) P(\bar{A}_1)$$

$$\begin{aligned}P(B) &= P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = P(\bar{A}_3 | \bar{A}_1 \bar{A}_2) P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1) P(\bar{A}_1) \\&= \left(1 - \frac{9}{10}\right) \left(1 - \frac{7}{10}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) \\&= \frac{3}{200}.\end{aligned}$$

另解, 按题意

$$\bar{B} = A_1 \cup \bar{A}_1 A_2 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3.$$

而 $A_1, \bar{A}_1 A_2, \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$ 是两两互不相容事件, 故有

$$P(\bar{B}) = P(A_1) + P(\bar{A}_1 A_2) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3).$$

$$\text{已知 } P(A_1) = \frac{1}{2}, \quad P(A_2|\bar{A}_1) = \frac{7}{10}, \quad P(A_3|\bar{A}_1\bar{A}_2) = \frac{9}{10},$$

$$\text{即有 } P(\bar{A}_1 A_2) = P(A_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_1) = \frac{7}{10} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{20},$$

$$\begin{aligned} P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) &= P(A_3|\bar{A}_1 \bar{A}_2)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_1) \\ &= \frac{9}{10} \left(1 - \frac{7}{10}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{27}{200}. \end{aligned}$$

$$P(\bar{B}) = \frac{1}{2} + \frac{7}{20} + \frac{27}{200} = \frac{197}{200}, \quad P(B) = 1 - \frac{197}{200} = \frac{3}{200}.$$

补充例题



三、全概率公式与贝叶斯公式

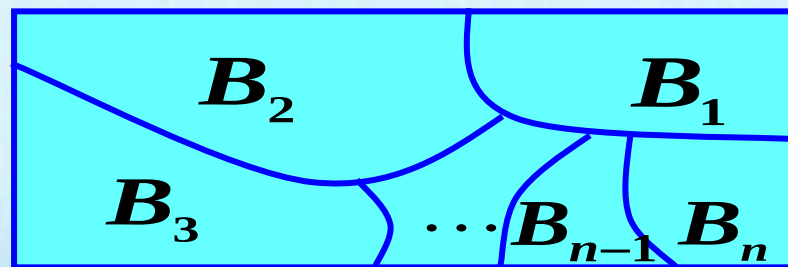
1. 样本空间的划分

定义 设 S 为试验 E 的样本空间, $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 E 的一组事件,若

(i) $B_i B_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n;$

(ii) $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = S,$

则称 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为样本空间 S 的一个划分.



2.全概率公式

定理 设试验 E 的样本空间为 S , A 为 E 的事件, $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 S 的一个划分, 且 $P(B_i) > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 则

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots \\ + P(A|B_n)P(B_n)$$

称为**全概率公式**.



证 因为

$$\begin{aligned} A &= AS = A(B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n) \\ &= AB_1 \cup AB_2 \cup \cdots \cup AB_n, \end{aligned}$$

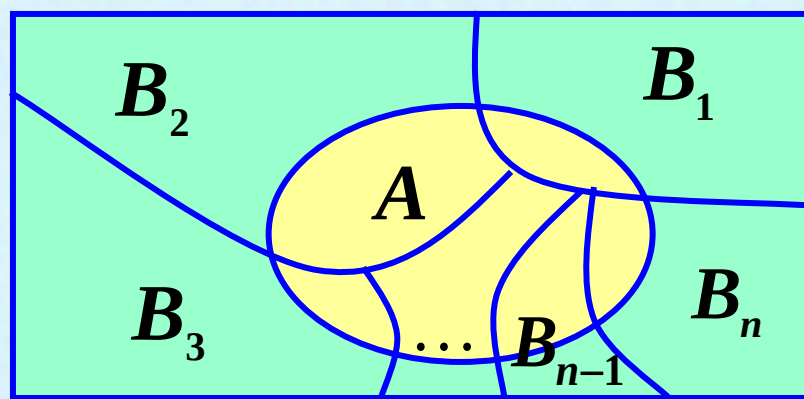
由假设 $P(B_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, 且 $(AB_i)(AB_j) = \emptyset$,
 $i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n$, 得到

$$\begin{aligned} P(A) &= P(AB_1) + P(AB_2) + \cdots + P(AB_n) \\ &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots \\ &\quad + P(A|B_n)P(B_n). \end{aligned}$$



说明 全概率公式的主要用处在于它可以将一个复杂事件的概率计算问题,分解为若干个简单事件的概率计算问题,最后应用概率的可加性求出最终结果.

图示



化整为零各个击破

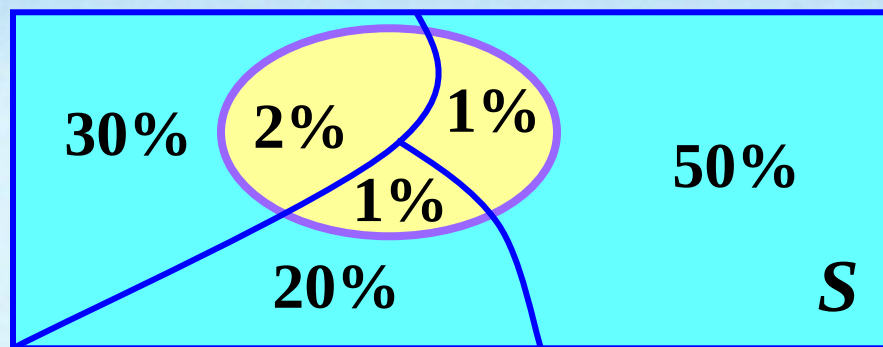


例5 有一批同一型号的产品，已知其中由一厂生产的占 30%，二厂生产的占 50%，三厂生产的占 20%，又知这三个厂的产品次品率分别为 2%，1%，1%，问从这批产品中任取一件是次品的概率是多少？

解 设事件 A 为“任取一件为次品”
事件 B_i 为“任取一件为 i 厂的产品”， $i = 1, 2, 3$.

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = S, \quad B_i B_j = \emptyset, \quad i, j = 1, 2, 3.$$





由全概率公式得

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3).$$

$$P(B_1) = 0.3, \quad P(B_2) = 0.5, \quad P(B_3) = 0.2,$$

$$P(A|B_1) = 0.02, \quad P(A|B_2) = 0.01, \quad P(A|B_3) = 0.01,$$

$$\begin{aligned} \text{故 } P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3) \\ &= 0.02 \times 0.3 + 0.01 \times 0.5 + 0.01 \times 0.2 = 0.013. \end{aligned}$$



3. 贝叶斯公式

定理 设试验 E 的样本空间为 S . A 为 E 的事件, $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 S 的一个划分, 且 $P(A) > 0$, $P(B_i) > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

此式称为**贝叶斯公式**.



证 由条件概率的定义及全概率公式得

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

若在公式中取 $n = 2$, 并将 B_1 记为 B , 则 B_2 就是 $\bar{B}$, 那么, 全概率公式和贝叶斯公式变为

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B}),$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})}.$$

例6 某电子设备制造厂所用的元件是由三家元件制造厂提供的. 根据以往的记录有以下的数据

元件制造厂	次品率	提供元件的份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

设这三家工厂的产品在仓库是均匀混合的, 且无区别的标志. (1) 在仓库中随机地取一只元件, 求它是

次品的概率; (2) 在仓库中随机地取一只元件, 若已知取到的是次品, 为分析此次品出自何厂, 需求出此次品由三家工厂生产的概率分别是多少. 试求这些概率.

解 设 A 表示“取到的是一只次品”, B_i ($i = 1, 2, 3$) 表示“所取到的产品是由第 i 家工厂提供的”.

易知, B_1, B_2, B_3 是样本空间 S 的一个划分, 而且有

$$P(B_1) = 0.15, \quad P(B_2) = 0.80, \quad P(B_3) = 0.05,$$

$$P(A|B_1) = 0.02, \quad P(A|B_2) = 0.01, \quad P(A|B_3) = 0.03.$$

(1) 由全概率公式

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3) \\ =0.0125.$$

(2) 由贝叶斯公式

$$P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}=\frac{0.02\times 0.15}{0.0125}=0.24.$$

$$P(B_2|A)=0.64, \quad P(B_3|A)=0.12.$$

以上结果表明, 这只次品来自第2家工厂的可能性最大.



例7 对以往数据分析结果表明,当机器调整良好时,产品的合格率为98%,而当机器发生某种故障时,其合格率为55%.每天早上机器开动时,机器调整良好的概率为95%.试求已知某日早上第一件产品是合格品时,机器调整良好的概率是多少?

解 设 A 为事件“产品合格”, B 为事件“机器调整良好”. 已知

$$P(A|B) = 0.98, \quad P(A|\bar{B}) = 0.55,$$

$$P(B) = 0.95, \quad P(\bar{B}) = 0.05,$$

所求的概率为 $P(B|A)$.由贝叶斯公式

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})} \\ &= \frac{0.98 \times 0.95}{0.98 \times 0.95 + 0.55 \times 0.05} \\ &= 0.97 . \end{aligned}$$

这就是说,当生产出的第一件产品是合格品时,此时机器调整良好的概率为0.97.



先验概率与后验概率

上题中概率 0.95 是由以往的数据分析得到的, 叫做**先验概率**.

而在得到信息之后再重新加以修正的概率 0.97 叫做**后验概率**.



例8 根据以往的临床记录, 某种诊断癌症的试验具有如下效果: 若以 A 表示“试验反应为阳性”, 以 C 表示事件“被诊断者患有癌症”, 则有 $P(A|C) = 0.95$, $P(\bar{A}|\bar{C}) = 0.95$. 现在对自然人群进行普查, 设被试验的人患有癌症的概率为0.005, 也就是 $P(C) = 0.005$, 试求 $P(C|A)$.

解 已知 $P(A|C) = 0.95$,

$$P(A|\bar{C}) = 1 - P(\bar{A}|\bar{C}) = 0.05,$$

$P(C) = 0.005$, $P(\bar{C}) = 0.995$, 由贝叶斯公式



$$P(C|A) = \frac{P(A|C)P(C)}{P(A|C)P(C) + P(A|\bar{C})P(\bar{C})} = 0.087.$$

本题结果表明, 虽然 $P(A|C) = 0.95$, $P(\bar{A}|\bar{C}) = 0.95$, 这两个概率都比较高. 但若将此试验用于普查, 则有 $P(C|A) = 0.087$, 亦即正确性只有8.7%. 如果不注意这一点, 将会得出错误的诊断.



四、小结

条件概率 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ $\longrightarrow$ 乘法定理

$$P(AB) = P(B|A)P(A)$$

全概率公式

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)$$

贝叶斯公式

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

条件概率 $P(A|B)$ 与积事件概率 $P(AB)$ 的区别

$P(AB)$ 表示在样本空间 S 中, AB 发生的概率, 而 $P(B|A)$ 表示在缩小的样本空间 S_A 中, B 发生的概率.

$$P(B|A) = \frac{AB \text{ 中基本事件数}}{S_A \text{ 中基本事件数}},$$

$$P(AB) = \frac{AB \text{ 中基本事件数}}{S \text{ 中基本事件数}},$$

一般来说, $P(B|A)$ 比 $P(AB)$ 大.



第六节 独立性

- 一、事件的相互独立性
- 二、几个重要定理
- 三、典型例题
- 四、小结

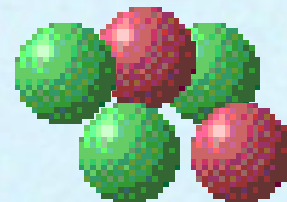
一、事件的相互独立性

1. 引例

盒中有5个球(3绿2红),每次取出一个,有放回地取两次.记

A = 第一次抽取, 取到绿球,

B = 第二次抽取, 取到绿球,



则有 $P(B|A) = P(B)$,

它表示 A 的发生并不影响 B 发生的可能性大小.

$$P(B|A) = P(B) \iff P(AB) = P(A)P(B)$$



2.定义 设 A, B 是两事件, 如果满足等式

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称事件 A, B 相互独立, 简称 A, B 独立.

说明

事件 A 与事件 B 相互独立, 是指事件 A 的发生与事件 B 发生的概率无关.

容易知道, 若 $P(A) > 0, P(B) > 0$, 则 A, B 相互独立与 A, B 互不相容不能同时成立.



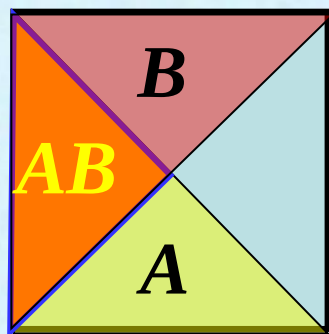
请同学们思考

两事件相互独立与两事件互斥的关系.

两事件相互独立 $P(AB) = P(A)P(B)$
两事件互斥 $AB = \emptyset$

二者之间没有必然联系

例如



若 $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2},$

则 $P(AB) = P(A)P(B).$

由此可见两事件相互独立, 但两事件不互斥.

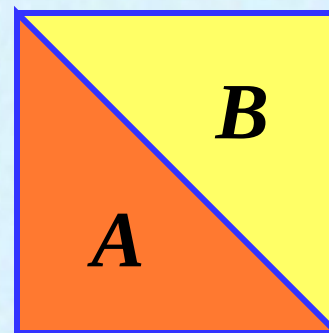


若 $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}$

则 $P(AB) = 0,$

$$P(A)P(B) = \frac{1}{4},$$

故 $P(AB) \neq P(A)P(B).$



由此可见两事件互斥但不独立.



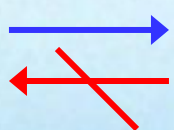
4. 三事件相互独立的概念

定义 设 A, B, C 是三个事件, 如果满足不等式

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(BC) = P(B)P(C) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

则称事件 A, B, C 相互独立.

注意

三个事件相互独立  三个事件两两相互独立

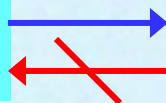


推广 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是 n 个事件, 如果对于任意 $k (1 < k \leq n)$, 任意 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, 具有等式

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}),$$

则称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为相互独立的事件.

n 个事件相互独立



n 个事件两两相互独立

二、几个重要定理

定理一 设 A, B 是两事件, 且 $P(A) > 0$, 若 A, B 相互独立, 则 $P(B|A) = P(B)$. 反之亦然.

证明

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B) \\ &\Leftrightarrow P(B|A) = P(B). \end{aligned}$$



定理二 若事件 A 与 B 相互独立, 则下列各对事件也相互独立.

A 与 $\bar{B}$, $\bar{A}$ 与 B , $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$.

证 因为 $A = A(B \cup \bar{B}) = AB \cup A\bar{B}$

于是 $P(A) = P(AB \cup A\bar{B}) = P(AB) + P(A\bar{B})$
 $= P(A)P(B) + P(A\bar{B})$

$$P(A\bar{B}) = P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(\bar{B})$$

因此 A 与 $\bar{B}$ 相互独立. 由此可立即推出 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 独立.

再由 $\bar{\bar{B}} = B$, 又推出 $\bar{A}$ 与 B 相互独立.



两个推论

1° 若事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 2$) 相互独立, 则其中任意 k ($2 \leq k \leq n$) 个事件也是相互独立.

2° 若事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 2$) 相互独立, 则将 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中任意多个事件换成它们各自的对立事件, 所得的 n 个事件仍相互独立.



三、典型例题

例1 设试验 E 为“抛甲,乙两枚硬币,观察正反面出现的情况”. 设事件 A 为“甲币出现 H ”,事件 B 为“乙币出现 H ”. E 的样本空间为

$$S=\{HH,HT,TH,TT\}.$$

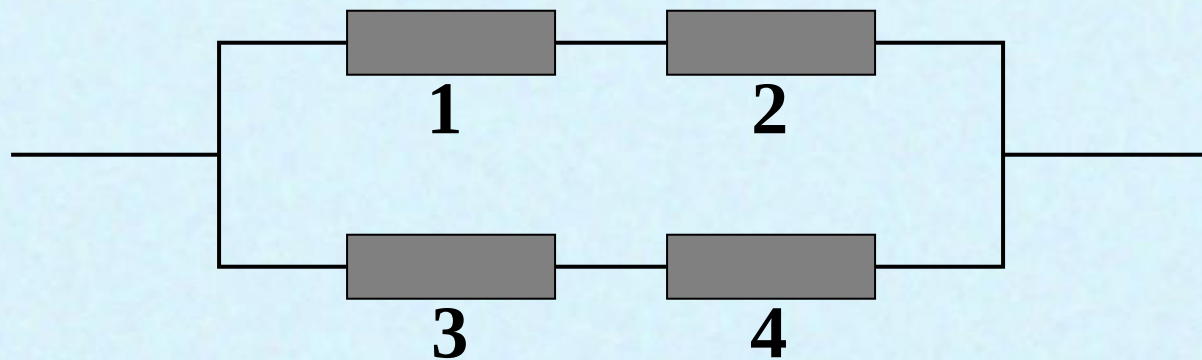
$$P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}, \quad P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}, \quad P(B|A)=\frac{1}{2}, \quad P(AB)=\frac{1}{4}.$$

所以 $P(B|A) = P(B)$, $P(AB)=P(A)P(B)$

由题意, 甲币是否出现正面与乙币是否出现正面是互不影响的.



例2 一个元件(或系统)能正常工作的概率称为元件(或系统)的可靠性. 如下图, 设有4个独立工作的元件1,2,3,4按先串联再并联的方式联接. 设第 i 个元件的可靠性为 p_i ($i = 1,2,3,4$), 试求系统的可靠性.



解 以 A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 表示事件“第 i 个元件正常工作”, 以 A 表示事件“系统正常工作”.

系统由两条线路I和II组成. 当且仅当至少有一条线路中两个元件均正常工作时, 系统才正常工作, 故有

$$A = A_1 A_2 \cup A_3 A_4 .$$

由事件的独立性, 得系统的可靠性

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 A_2) + P(A_3 A_4) - P(A_1 A_2 A_3 A_4) \\ &= P(A_1)P(A_2) + P(A_3)P(A_4) - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) \\ &= p_1 p_2 + p_3 p_4 - p_1 p_2 p_3 p_4 . \end{aligned}$$



**例3 要验收一批(100件)乐器. 验收方案如下:
自该批乐器中随机地取3件测试(设3件乐器的测试是相互独立的), 如果3件中至少有一件在测试中被认为音色不纯, 则这批乐器就被拒绝接收. 设一件音色不纯的乐器经测试查出其为音色不纯的概率为0.95; 而一件音色纯的乐器经测试被误认为不纯的概率为0.01. 如果已知这100件乐器中恰有4件是音色不纯的. 试问这批乐器被接收的概率是多少?**



解 设以 H_i ($i = 0, 1, 2, 3$) 表示事件“随机地取出3件乐器, 其中恰有*i*件音色不纯”,

H_0, H_1, H_2, H_3 是 S 的一个划分,

以 A 表示事件“这批乐器被接收”



已知一件音色纯的乐器, 经测试被认为音色纯的概率为 0.99, 而一件音色不纯的乐器, 经测试被认为音色纯的概率为 0.05, 并且三件乐器的测试是相互独立的, 于是有

$$P(A|H_0) = (0.99)^3, \quad P(A|H_1) = (0.99)^2 \times 0.05,$$

$$P(A|H_2)=0.99 \times (0.05)^2, \quad P(A|H_3)=(0.05)^3,$$

$$\text{而 } P(H_0)=\frac{\binom{96}{3}}{\binom{100}{3}}, \quad P(H_1)=\frac{\binom{4}{1}\binom{96}{2}}{\binom{100}{3}},$$

$$P(H_2)=\frac{\binom{4}{2}\binom{96}{1}}{\binom{100}{3}}, \quad P(H_3)=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{100}{3}}.$$

$$\begin{aligned} \text{故 } P(A) &= \sum_{i=0}^3 P(A|H_i)P(H_i) \\ &= 0.8574 + 0.0055 + 0 + 0 \\ &= 0.8629. \end{aligned}$$



例4 甲、乙两人进行乒乓球比赛,每局甲胜的概率为 p , $p \geq 1/2$. 问对甲而言, 采取三局两胜制有利, 还是五局三胜制有利. 设各局胜负相互独立.

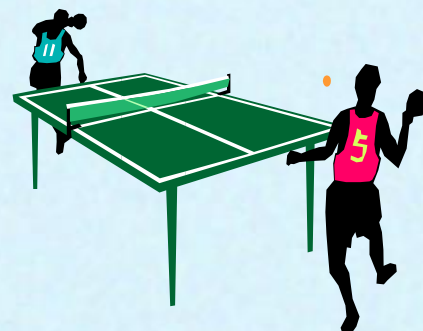
解 采用三局二胜制, 甲最终获胜, 胜局情况可能是:

“**甲甲**”, “**乙甲甲**”, “**甲乙甲**”;

由于这三种情况互不相容,

于是由独立性得甲最终获胜的概率为:

$$p_1 = p^2 + 2p^2(1-p).$$



采用五局三胜制,甲最终获胜,至少需比赛3局,且最后一局必需是甲胜,而前面甲需胜二局.

例如,比赛四局,则甲的胜局情况可能是:

“**甲乙甲甲**”, “**乙甲甲甲**”, “**甲甲乙甲**”;

由于这三种情况互不相容,于是由独立性得:

在五局三胜制下,甲最终获胜的概率为:

$$p_2 = p^3 + \binom{3}{2} p^3 (1-p) + \binom{4}{2} p^3 (1-p)^2.$$



$$\begin{aligned}\text{由于 } p_2 - p_1 &= p^2(6p^3 - 15p^2 + 12p - 3) \\ &= 3p^2(p-1)^2(2p-1).\end{aligned}$$

当 $p > \frac{1}{2}$ 时, $p_2 > p_1$; 当 $p = \frac{1}{2}$ 时, $p_2 = p_1 = \frac{1}{2}$.

故当 $p > \frac{1}{2}$ 时, 对甲来说采用五局三胜制有利.

当 $p = \frac{1}{2}$ 时, 两种赛制甲最终获胜的概率是相同的, 都是 $\frac{1}{2}$.

补充例题



四、小结

1. A, B 两事件独立 $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$

A, B, C 三个事件相互独立

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P(AB) = P(A)P(B), \\ P(BC) = P(B)P(C), \\ P(AC) = P(A)P(C), \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C). \end{cases}$$

2. 重要结论

A, B 相互独立 $\Leftrightarrow \bar{A}$ 与 B, A 与 $\bar{B}, \bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相互独立.

