

第三节 维数·基与坐标

主要内容

● 线性相关与线性无关

● 线性空间的维与基

一、线性相关与线性无关

1. 定义 1) 线性组合

定义 2 设 V 是数域 P 上的一个线性空间,

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ ($r \geq 1$) 是 V 中一组向量, $k_1, k_2, \dots,$

k_r 是数域 P 中的数, 那么向量

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r$$

称为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 的一个**线性组合**. 此时

也称向量 α 可以用向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ **线性表出**.

2) 等价

定义 3 设

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r; \quad (1)$$

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s \quad (2)$$

是 V 中两个向量组. 如果 (1) 中每个向量都可以用向量组 (2) 线性表出, 那么称向量组 (1) 可以用向量组 (2) 线性表出. 如果 (1) 与 (2) 可以互相线性表出, 那么向量组 (1) 与 (2) 称为**等价的**.

3) 线性相关与线性无关

定义 4 线性空间 V 中向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ ($r \geq 1$) 称为线性相关, 如果在数域 P 中有 r 个不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_r$, 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r = 0. \quad (3)$$

如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 不线性相关, 就称为**线性无关**. 换句话说, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 称为**线性无关**, 如果等式 (3) 只有在 $k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0$ 时才成立.

2. 几个常用结论

1) 单个向量 α 是线性相关的充分必要条件是 $\alpha = 0$. 两个以上的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性相关的充分必要条件是其中有一个向量是其向量的线性组合.

证明 

2) 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 而且可以被 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表出, 那么 $r \leq s$.

证明 

由此推出, 两个等价的线性无关的向量组, 必定含有相同个数的向量.

3) 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 但向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$ 线性相关, 那么 β 可以被 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表出, 而且表法是唯一的.

证明 

例 1 证明

$$p_1(x) = 1 + x, \quad p_2(x) = 1 - x, \quad p_3(x) = x + x^2$$

线性无关.

证明 设有三个数 k_1, k_2, k_3 使

$$k_1 p_1(x) + k_2 p_2(x) + k_3 p_3(x) = 0,$$

即
$$k_1(1 + x) + k_2(1 - x) + k_3(x + x^2) = 0,$$

也即
$$(k_1 + k_2) + (k_1 - k_2 + k_3)x + k_3 x^2 = 0,$$

于是
$$k_1 + k_2 = 0; \quad k_1 - k_2 + k_3 = 0; \quad k_3 = 0.$$

从而得
$$k_1 = k_2 = k_3 = 0.$$

证毕

二、线性空间的维与基

1. 线性空间的维

1) 引入

2) 定义

定义 5 如果在线性空间 V 中有 n 个线性无关的向量，但是没有更多数目的线性无关的向量，那么 V 就称为 **n 维的**；如果在 V 中可以找到任意多个线性无关的向量，那么 V 就称为**无限维的**。

例如

几何空间中向量所成的线性空间是三维的；

n 元数组所成的空间是 n 维的；

由所有实系数多项式所成的实线性空间是无
限维的，因为对于任意的 n ，都有 n 个线性无关的
向量

$$1, x, \dots, x^{n-1}, \dots$$

2. 线性空间的基

定义 6 在 n 维线性空间 V 中, n 个线性无关的向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 称为 V 的一组基. 设 α 是 V 中任一向量, 于是 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \alpha$ 线性相关, 因此 α 可以被基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 线性表出:

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n,$$

其中系数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是由向量 α 和基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 唯一确定的, 这组数就称为 α 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的坐标, 记为 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

3. 维与基的关系

定理 1 如果在线性空间 V 中有 n 个线性无关的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 且 V 中任一向量都可以用它们线性表出, 那么 V 是 n 维的, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 就是 V 的一组基.

证明 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是线性无关的, 所以 V 的维数至少是 n . 为了证明 V 是 n 维的, 只须证 V 中任意 $n+1$ 个向量必定线性相关. 设

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+1}$$

是 V 中任意 $n+1$ 个向量，它们可以用 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出。假设它们线性无关，就有 $n+1 \leq n$ ，于是得出矛盾。

证毕

例 2 在线性空间 $P[x]_n$ 中，

$$1, x, \dots, x^{n-1}$$

是 n 个线性无关的向量，而且每一个次数小于 n 的数域 P 上的多项式都可被它们线性表出，所以 $P[x]_n$ 是 n 维的，而 $1, x, \dots, x^{n-1}$ 就是它的基。

在这组基下, 多项式 $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ 的坐标就是它的系数 $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$.

如果在 V 中取另外一组基

$$\varepsilon_1' = 1, \varepsilon_2' = (x - a), \dots, \varepsilon_n' = (x - a)^{n-1}.$$

那么按泰勒展开公式

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x - a)^{n-1}.$$

因此, $f(x)$ 在基 $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \dots, \varepsilon_n'$ 下的坐标是

$$(f(a), f'(a), \dots, \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}).$$



在 n 维空间 P^n 中, 显然

[illegible]

是一组基. 对每一个向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, 都有

$$\alpha = a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n .$$

所以 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 就是向量 α 在这组基下的坐标.



$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon'_1 = (1,1,\cdots,1) , \\ \varepsilon'_2 = (0,1,\cdots,1) , \\ \dots\dots\dots \\ \varepsilon'_n = (0,0,\cdots,1) \end{array} \right.$$

也是 P^n 的一组基. 在这个基下, 因为

$$\alpha = a_1 \varepsilon_1' + (a_2 - a_1) \varepsilon_2' + \dots + (a_n - a_{n-1}) \varepsilon_n'.$$

所以 α 在基 $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \dots, \varepsilon_n'$ 下的坐标为

$$(a_1, a_2 - a_1, \dots, a_n - a_{n-1}).$$



例 4 如果复数域 C 看作是自身上的线性空

间，那么这是一维的，数 1 就是一组基；如果看作是实数域 R 上的线性空间，那么就是二维的，数 1 与 i 就是一组基。

维数是和所考虑的数域有关的。