



案例 1

二项分布在人寿保险中的应用

1、背景知识

随着中国经济的突飞猛进，快速发展，人们越来越重视自身的健康和保护，特别是人寿保险事业，在近十年的时间里从无到有，再到发展成具有现在的众多实力强劲保险公司。人寿保险已经日益深入人心，购买人寿保险已经是人们自我保护和预防自身突发事件的一种重要手段。

2、案例分析

人们自然会问，自己交很少的钱，而一旦自己发生变故，保险公司会赔付超过自己所交保金百倍的赔偿金，那么保险公司会不会因此而赔本呢？答案当然是否定的，否则保险公司不都会纷纷倒闭了么。下面以某人寿保险公司的保费赔偿方式运用概率统计的方法分析。

有 2500 个同年龄段同社会阶层的人参加某保险公司的人寿保险。以往的统计资料显示，在一年中，每个人死亡的概率为 0.0001。每个参加保险的人一年付给保险公司 120 元的保险费，而在死亡时其家属可从保险公司领取 20000 元，下面来考察（不计息）下列事件的概率。

(1) $A = \{\text{保险公司亏本}\}$

设 X 表示 2500 人中死亡人数，则 X 服从参数为 0.0001 和 2500 的二项分布。设 2500 人中有 k 人死亡，则保险公司亏本当且仅当 $20000k > 2500 \times 120$ ，即 $k > 15$ 。而

$$P(X = k) = C_{2500}^k (0.0001)^k (0.9999)^{2500-k}, k = 0, 1, \dots, 2500$$

所以由泊松定理知

$$P(A) = \sum_{k=16}^{2500} C_{2500}^k (0.0001)^k (0.9999)^{2500-k} \approx 0.000001$$

(2) $B = \{\text{保险公司一年获利不少于 100000 元}\}$

保险公司每年获利不少于 10 万等价于 $2500 \times 120 - 20000k \geq 10^5$ ，即 $k \leq 10$ 。

于是由泊松定理知

$$P(B) = \sum_{k=0}^{10} C_{2500}^k (0.0001)^k (0.9999)^{2500-k} \approx 0.999993662$$

考虑另外的问题，对于保险公司来说，保金收取太少，获利将减少，但太多，参保人数将减少，获利也会降低。所以，在死亡率和参保对象都已知的前提下，确定保金额度就是很重要的问题。从而提出下面的问题

对 2500 个参保对象（每人死亡率为 0.0001）每人每年至少交多少保金才能使公司以不小于 0.99 的概率每年获利不少于 10 万元（设赔偿费不变）？

设 x 为每人每年缴纳的保金，由 $2500x - 20000k \geq 10^5$ ，得 $x \geq 8k + 40$ ，这是一个不定方程，又因为

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{2500}^k (0.0001)^k (0.9999)^{2500-k} = 0.99784 > 0.99$$



此即当 2500 个人中死亡数不超过 2 人时，公司获利 10 万元的概率不小于 0.99，故 $x \geq 56$ 。

由于保险公司之间竞争激烈，为了吸引参保者，挤垮对手，包金还可降低，只要不赔本就行，所以保险公司还会考虑以下问题。

在死亡率和赔偿费不变的情形下，每人每年交给保险公司 20 元保金，保险公司至少需要吸引多少个参保者才能以不小于 0.99 的概率不亏本？

设 y 是参保人数， k 仍为参保者的死亡数，类似可得 $20y - 20000k \geq 0$ ，即 $y \geq 1000k$ ，

者仍是一个不定方程，当 $k=1$ 时， $y \geq 1000$ ，注意到

$$\sum_{k=0}^1 C_{1000}^k (0.0001)^k (0.9999)^{1000-k} = 0.99532 > 0.99$$

所以，保险公司只需吸引 1000 人参保即可达到目的。

(3) 结果分析

由上面的计算结果，保险公司几乎不会亏本，几乎每年都会获得高额利润。