

《概率论与数理统计》模拟试卷 13 参考答案

一、判断题.

- (×) 1. 若事件 A, B 满足 $A \cup B = \Omega$, 则称 A 与 B 是对立事件.
- (√) 2. 无记忆性是指数分布的特征.
- (×) 3. 统计量是含有未知参数的样本函数.
- (×) 4. 二维随机变量的联合分布函数不能确定边缘分布函数.
- (√) 5. 二项分布的极限分布是正态分布.
- (×) 6. 对于任意的 X 和 Y , 都有 $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$.
- (√) 7. 获得简单随机样本的抽样方法称为简单随机抽样.

二、填空题.

1. 设一批产品中一、二、三等品各占 60%, 30%, 10%, 现从中随机抽取一件, 结果不是三等品, 则取到的是一等品的概率为 $\frac{2}{3}$.
2. 设 $X \sim N(3, 4)$, 则 $P(2 < X \leq 4) = \underline{0.383}$. ($\Phi(0.5) = 0.6915$)
3. 设随机变量 X 的期望为 $E(X) = \mu$, 方差为 $D(X) = \sigma^2$, 由切比雪夫不等式知 $P\{|X - \mu| \geq 2\sigma\} \leq \underline{\frac{1}{4} \text{ 或 } (0.25)}$.
4. 估计量的优良性包括无偏性、有效性和相合性 (或一致性).
5. 设 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, 则 X 和 Y 相互独立的充分必要条件是 $\underline{\rho = 0}$.

三、选择题.

1. 对于两个随机事件 A 与 B , 则与 $A \cup B = B$ 不等价的是 (B).
- A. $A \subset B$ B. $\bar{A}B = \phi$ C. $A\bar{B} = \phi$ D. $\bar{B} \subset \bar{A}$
2. 在全国人口普查中, 调查个体是 (A).
- A. 每一个人 B. 每一户 C. 全国人口 D. 每个省
3. 二维正态分布的两个边缘分布都是 (C).
- A. 二项分布 B. 指数分布 C. 一维正态分布 D. 泊松分布
4. 若 $X \sim N(1, 4)$, $Y \sim N(1, 9)$ 且 $\rho_{XY} = 0.45$, 则 $\text{Cov}(X, Y) = (D)$.

- A. 2.4 B. 2.5 C. 2.6 D. 2.7
5. 设 $f(x) = \lambda e^{-3x}, x \geq 0$ 是概率密度函数, 则常数 λ 的值为 (D).
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
6. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 已知, 若样本容量 n 和置信度 $1-\alpha$ 均不变, 则对于不同的样本观测值, 总体均值 μ 的置信区间长度 (C).
- A. 变长 B. 变短 C. 保持不变 D. 不能确定
7. 由独立同分布中心极限定理可知, n 充分大时, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim$ (B).
- A. $N(0,1)$ B. $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ C. $N(\mu, \sigma^2)$ D. $N(n\mu, n\sigma^2)$

四、计算题.

1. 设总体 $X \sim P(\lambda)$, 分布律为: $P(X=x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, (\lambda > 0, x=0,1,2,\dots)$

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是来自总体 X 的一个样本观测值, 且 $x_i > 0, (i=1,2,\dots,n)$, 求 λ 的最大似然估计 $\hat{\lambda}$?

解: 似然函数为:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^n P(x_i; \lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{(x_i)!} e^{-\lambda} = e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n [(x_i)!]}$$

似然函数取对数:

$$\ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = -n\lambda + \ln \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) - \sum_{i=1}^n \ln [(x_i)!]$$

对数似然函数求导并令导数为零, 可得:

$$\frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \ln \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) - n\lambda - \sum_{i=1}^n \ln [(x_i)!] \right\} = \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) - n = 0$$

$$\therefore \hat{\lambda} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) = \bar{x}.$$

2. 设工厂 A, B 和 C 三个厂生产同样产品, 它们的产品的次品率分别为 1%、

2% 和 3%，现从 A、B 和 C 厂的产品分别占 45%、35% 和 20% 的一批产品中随机抽取一件，则（1）该产品是次品的概率是多大？（2）若取到的是正品，它是由 A 厂生产的概率为多大？

解 设 A_1, A_2, A_3 分别表示 “A、B 和 C 三个厂生产的产品”，

B 表示 “取到合格品”， $\bar{B}$ 表示 “取到次品”

依题意知：那么 A_1, A_2, A_3 构成一个完备事件组。

$$P(A_1) = 0.45 \quad P(A_2) = 0.35 \quad P(A_3) = 0.2$$

$$P(B | A_1) = 0.99 \quad P(B | A_2) = 0.98 \quad P(B | A_3) = 0.97$$

$$P(\bar{B} | A_1) = 0.01 \quad P(\bar{B} | A_2) = 0.02 \quad P(\bar{B} | A_3) = 0.03$$

（1）由全概率公式可得：

$$\begin{aligned} P(\bar{B}) &= P(A_1)P(\bar{B} | A_1) + P(A_2)P(\bar{B} | A_2) + P(A_3)P(\bar{B} | A_3) \\ &= 0.45 \times 0.01 + 0.35 \times 0.02 + 0.2 \times 0.03 \\ &= 0.0175 \end{aligned}$$

（2）由贝叶斯公式知，取到的是正品，它是由 A 厂生产的概率为：

$$\begin{aligned} P(A_1 | B) &= \frac{P(A_1)P(B | A_1)}{\sum_{i=1}^3 P(A_i)P(B | A_i)} \\ &= \frac{0.45 \times 0.99}{0.45 \times 0.99 + 0.35 \times 0.98 + 0.2 \times 0.97} = 0.453 \end{aligned}$$

3. 设 X 的概率密度为： $f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ ，已知 $E(X) = \frac{3}{5}$ ，

求（1）常数 a 和 b ；（2） $D(X)$ 。

解：由 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 (a + bx^2) dx = a + \frac{b}{3}$ ①

$$\frac{3}{5} = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \int_0^1 x \cdot (a + bx^2) dx = \frac{a}{2} + \frac{b}{4} \quad \text{②}$$

由①、②联立方程组，解得： $a = \frac{3}{5}$ ， $b = \frac{6}{5}$ ，

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{3}{5} + \frac{6}{5}x^2 & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \int_0^1 x^2 \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{6}{5}x^2\right) dx = \frac{11}{25}$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{11}{25} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{25}$$

4. 设某次考试的学生成绩服从正态分布，且标准差为16，从中随机抽取36位考生的成绩，算得平均成绩为66.5分，样本方差 $s^2 = 225$ ，问在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下，是否可以认为这次考试考生的成绩的方差是256？

$$\left(\chi^2_{0.01}(35) = 57.340 \quad ; \quad \chi^2_{0.025}(35) = 53.203 \quad ; \quad \chi^2_{0.975}(35) = 20.569 \quad ; \right. \\ \left. \chi^2_{0.99}(35) = 18.508 \right)$$

解：（1）待检假设为： $H_0: \sigma^2 = 256 \leftrightarrow H_1: \sigma^2 \neq 256$

$$(2) \quad \text{已知：} n = 36, \quad s^2 = 225, \quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{35 \times 225}{256} = 30.762$$

$$(3) \quad \alpha = 0.05, \quad \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.025}(35) = 53.203; \quad \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.975}(35) = 20.569$$

$$\text{故拒绝域为：} \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq 53.203 \quad \text{或} \quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq 20.569$$

（4）由于 $20.569 < \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = 30.762 < 53.203$ 成立，所以，接受 H_0 ，即认为这

次考试考生的成绩的方差仍是256。

5. 某房地产投资公司出售6个楼盘面积与售价资料如下：

楼盘面积 X （百平方米）	9	15	10	11	10	16
售价 y （万元）	36	56	44	50	42	72

试建立售价 Y 对楼盘面积 X 的直线回归方程？

解：（1）

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
	9	36	81	1296	324
	15	56	225	3136	840
	10	44	100	1936	440
	11	50	121	2500	550
	10	42	100	1764	420
	16	72	256	5184	1152
Σ	71	300	883	15816	3726
$\frac{1}{n}\Sigma$	11.83	50			

$$\sum_{i=1}^6 x_i = 71 \quad \sum_{i=1}^6 y_i = 300 \quad \sum_{i=1}^6 x_i^2 = 883 \quad \sum_{i=1}^6 y_i^2 = 15816 \quad \sum_{i=1}^6 x_i y_i = 3726$$

$$\text{回归方程: } \hat{b} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n(\sum_{i=1}^n x_i^2) - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{6 \times 3726 - 71 \times 300}{6 \times 883 - (71)^2} \approx 4.109$$

$$\hat{a} = \bar{y} - b\bar{x} = 50 - 4.109 \times 11.83 \approx 1.3905$$

所以，回归方程为 $\hat{y} = 1.3905 + 4.109x$